Lysbevægelsen i og uden for en af plane Lysbølger belyst Kugle.

Af

L. Lorenz.

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. VI. 1.

Kjobenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri (F. Dreyer).

1890.

Saalænge vi betragte Lyset som Straaler, der indbyrdes interferere, brydes og tilbagekastes i Legemernes Overflader efter visse Love, er vor Opfattelse af Lysbevægelsen endnu kun elementær og stykkevis, idet vi opløse den almindelige Grundlov for hele Lysbevægelsen i Enkeltlove og adskille Fænomener, som væsentlig høre sammen. Denne elementære Betragtningsmaade har og vil dog altid have sin store Betydning, men saalænge vi ikke kunne komme ud over den, ville mange af Optikens Opgaver komme til at henstaa uløste og uopløselige.

Den almindelige Grundlov for Lysbevægelsen er ligesom Lovene for Elektricitetens og Elasticitetskræfternes Forplantning af en simpel Form, idet den kan udtrykkes ved tre samtidige partielle lineære Differentialligninger af anden Orden, hvori de tre Svingningskomposanter ere de afhængige, Rummets og Tidens Koordinater de uafhængige Variable. Alle den formelle Optiks Opgaver maa kunne lade sig henføre til Integrationen af disse Ligninger.

I en Afhandling «Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche» havde A. Clebsch[1]) søgt at bestemme Lysets Tilbagekastning fra fuldstændig reflekterende Kugleflader ved at gaa ud fra Elasticitetstheoriens Differentialligninger, men den egentlige Hovedvanskelighed lykkedes det den dygtige Mathematiker ikke at overvinde, hvad Forfatteren udtaler i Indledningen med de Ord: «Die Resultate der ganzen Untersuchung sind sehr verwickelt, und namentlich für den in der Optik wichtigen Fall einer sehr kleinen Wellenlänge scheint es sehr schwer dieselben einfach in passender Form darzustellen». Hvorimod der tilføjes: «Der entgegengesetzte Fall eines gegen die Wellenlänge sehr kleinen Radius der reflectirenden Kugel ist dagegen für eine Annäherung sehr geeignet».

De Differentialligninger, hvorfra nærværende Undersøgelser gaa ud, have været fremstillede og begrundede i flere af mine tidligere Arbejder. De adskille sig fra Elasticitetstheoriens derved, at de udelukke Muligheden af Længdesvingninger, og da de gjælde

---

[1]) Crelles Journal, Bd. 61, S. 195. 1863.

for ethvert Punkt i et hvilketsomhelst gjennemsigtigt heterogent Medium, ville Grænsebetingelserne ved Overgangen fra et Legeme til et andet lade sig udlede af selve Differentialligningerne.

I et tidligere Arbejde «Farvespredningens Theori»[1]) har jeg af de samme Differentialligninger udledet Formler, som tjene til Bestemmelsen af Lysbevægelsen i et af koncentriske, kugleformige Lag bestaaende Medium, og Beregningen blev her anvendt paa et System af smaa, ved «tomt» Rum adskilte Kugler med store indbyrdes Afstande, med det Maal for Øje at bestemme Lysbrydningens Afhængighed af Systemets Tæthed. Senere har jeg benyttet de samme Rækkeudviklinger til Løsningen af den Opgave, som jeg her har for Øje, nemlig Bestemmelsen af den Lysbevægelse, som fremkommer, naar en homogen, gjennemsigtig og isotrop Kugle belyses af plane, parallele Lysbølger, og det er ogsaa ad denne Vej lykkedes mig at naa til de samme Resultater, som her skulle meddeles. Men jeg har i det følgende foretrukket en anden og simplere Fremstillingsmaade, hvorved jeg tillige til Lettelse for Læsningen skal undgaa at forudsætte Kjendskab til mit tidligere Arbejde.

I. Grænsebetingelser.

Ved ξ, η, ζ betegnes Lyssvingningernes Komposanter, svarende til Tids- og Rumkoordinaterne t, x, y, z. Indføres endvidere Betegnelserne

$$\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}, \quad \theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz},$$

ville Lovene for Lysbevægelsen i et hvilketsomhelst gjennemsigtigt Medium kunne udtrykkes ved de tre Differentialligninger

$$\Delta_2\xi - \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2\xi}{dt^2}, \quad \Delta_2\eta - \frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2\eta}{dt^2}, \quad \Delta\zeta_2 - \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2\zeta}{dt^2}, \qquad (1)$$

idet ω i Almindelighed er en af x, y, z afhængig Variabel, som svarer til Lysets Hastighed i Punktet x, y, z, for saa vidt som man inden for et meget lille Rum kan betragte denne som konstant.

Nærværende Opgave bestaar i at integrere disse Ligninger under Forudsætning af, at ω har en konstant Værdi inden for en given Kugles Overflade og en anden konstant Værdi uden for samme, med diskontinuert Overgang i selve Kuglefladen. Denne diskontinuerte Overgang kan betragtes som fremkommen ved, at et Overfladelag med endelig

[1]) Vidensk. Selsk. Skr. 6. Række, S. 167. 1883.

Tykkelse og kontinuerlig Forandring af ω, betragtet som Funktion af Afstanden r fra Kuglens Centrum, gaar over til at blive et Lag med Tykkelsen Nul. Ved denne Overgang maa Svingningskomposanterne her som overalt forblive endelige, hvorimod deres Differentialkoefficienter med Hensyn til r kunne blive uendelige. Komposanterne og deres Differentialkoefficienter gaa derfor i Almindelighed i Grænsefladen, naar Grænselagets Tykkelse reduceres til 0, diskontinuert over fra en Værdi til en anden, medens dog enkelte Kombinationer af dem kunne beholde deres Værdi uforandret.

Idet jeg skal opsøge disse, vil jeg foretrække i Stedet for Komposanterne med Hensyn til det faste Axesystem at benytte Projektionen af Svingningsudslaget paa Radius, Projektionen vinkelret herpaa og beliggende i Planen gjennem Radius og x-Axen, og Projektionen vinkelret paa de to foregaaende og altsaa vinkelret paa x-Axen.

Sættes i polære Koordinater

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\varphi\sin\psi,$$

og betegnes de nye Komposanter ved $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\zeta}$, vil man have disse bestemt ved

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\xi} &= \cos\varphi\,\xi + \sin\varphi\cos\psi\,\eta + \sin\varphi\sin\psi\,\zeta, \\
\overline{\eta} &= -\sin\varphi\,\xi + \cos\varphi\cos\psi\,\eta + \cos\varphi\sin\psi\,\zeta, \\
\overline{\zeta} &= \qquad\qquad - \sin\psi\,\eta + \cos\psi\,\zeta.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Naar Ligningerne (1) multipliceres henholdsvis med x, y og z, og adderes, vil man erholde

$$\varDelta_2 r\overline{\xi} - \frac{d r^2\theta}{r\,dr} = \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2 r\overline{\xi}}{dt^2},$$

hvoraf ses, naar $\varDelta_2$ udtrykkes ved polære Koordinater, at

$$\frac{d^2 r^2\overline{\xi}}{dr^2} - \frac{d r^2\theta}{dr}$$

lader sig udtrykke ved Størrelser, som forblive endelige, ogsaa naar Grænselagets Tykkelse reduceres til Nul.

Men heraf følger, at

$$\frac{d r^2\overline{\xi}}{dr} - r^2\theta$$

er en kontinuerlig Funktion, som derfor ogsaa forbliver endelig i Grænsefladen, da den er endelig til begge Sider uden for denne. Altsaa er ogsaa

$$\frac{d\overline{\xi}}{dr} - \theta$$

en overalt endelig Størrelse.

Multipliceres endvidere Ligningerne (1) henholdsvis med $-\sin\varphi$, $\cos\varphi\cos\psi$, $\cos\varphi\sin\psi$ og adderes, vil man erholde

$$\frac{d^2 r\bar{\eta}}{dr^2} - \frac{d\theta}{d\varphi}$$

udtrykt ved Størrelser, som forblive endelige overalt. Ligeledes findes ved Multiplikation af Ligningerne (1) med 0, — $\sin\psi$, $\cos\psi$ og Addition

$$\frac{d^2 r\bar{\zeta}}{dr^2} - \frac{d\theta}{\sin\varphi\, d\psi}$$

udtrykt ved overalt endelige Størrelser.

Vi have saaledes fundet tre Kombinationer, som ere endelige overalt. Elimineres heraf θ, ses det, at Størrelserne

$$\frac{d^2 r\bar{\eta}}{dr^2} - \frac{d^2\bar{\xi}}{d\varphi dr} \quad \text{og} \quad \frac{d^2 r\bar{\zeta}}{dr^2} - \frac{d^2\bar{\xi}}{\sin\varphi\, d\psi dr}$$

ere endelige overalt, hvoraf følger, at

$$\frac{dr\bar{\eta}}{dr} - \frac{d\bar{\xi}}{d\varphi} \quad \text{og} \quad \frac{dr\bar{\zeta}}{dr} - \frac{d\bar{\xi}}{\sin\varphi\, d\psi}$$

ere kontinuerlige Funktioner, som altsaa forblive uforandrede ved Overgangen fra den ene Side af Kuglens Begrænsningsflade til den anden. Jeg vil udtrykke dette ved

$$\left[\frac{dr\bar{\eta}}{dr} - \frac{d\bar{\xi}}{d\varphi}\right] = 0, \quad \left[\frac{dr\bar{\zeta}}{dr} - \frac{d\bar{\xi}}{\sin\varphi\, d\psi}\right] = 0. \tag{3}$$

Tillige bemærkes, at de samme Størrelser som kontinuerlige Funktioner og endelige overalt uden for Grænsefladen ogsaa maa være endelige i Grænsefladen. Men heraf følger, at $r\bar{\eta}$ og $r\bar{\zeta}$ maa være kontinuerlige, saaledes at man med samme Betegnelse som ovenfor vil have

$$[\bar{\eta}] = 0, \quad [\bar{\zeta}] = 0. \tag{4}$$

De til $r = 0$ og $r = \infty$ svarende Grænsebetingelser ere udtrykte derved, at Lysbevægelsen er endelig overalt, altsaa ogsaa for $r = 0$, og at der i uendelig Afstand fra Kuglen foruden det givne indfaldende Lys kun findes Lys, som er udgaaet fra Kuglen, men intet, som bevæger sig henimod den.

2. Udvikling efter Kuglefunktioner.

Det paa Kuglen indfaldende Lys er antaget at bestaa af plane, parallele Lysbølger. I Almindelighed kunne disse indeholde en Samling af Svingninger, forskjellige i Henseende til Amplitude, Retning inden for Bølgeplanen, Svingningstid og Fase, men dette almindelige Tilfælde lader sig med Lethed aflede af det enkelte, hvori Svingningskomposanterne, som vi ville betegne ved ξ_0, η_0, ζ_0, uden for Kuglen ere bestemte ved

$$\xi_0 = 0, \quad \eta_0 = e^{(kt-lx)i}, \quad \zeta_0 = 0. \tag{5}$$

Her er den exponentielle Form valgt som den simpleste, Svingningerne med Amplituden 1 gaa i Retning af y-Axen og forplante sig i Retning af z-Axen med den konstante Hastighed $\frac{k}{l} = \Omega$, med Bølgelængden $\frac{2\pi}{l} = \lambda$ og Svingningstiden $\frac{2\pi}{k} = T$.

Idet vi saaledes uden for Kuglen udskille det indfaldende Lys fra det øvrige, ved Hastighedsforandringen i Kuglens Overflade fremkaldte, Lys, sættes her

$$\xi = \xi_0 + \xi_e, \quad \eta = \eta_0 + \eta_e, \quad \zeta = \zeta_0 + \zeta_e, \tag{6}$$

medens der inden for Kuglens Overflade sættes

$$\xi = \xi', \quad \eta = \eta', \quad \zeta = \zeta', \tag{7}$$

hvor ogsaa l', Ω' λ' træde i Stedet for de tilsvarende umarkerede Størrelser uden for Kuglen. Betegnes endvidere Forholdet imellem de to Hastigheder Ω og Ω' ved N (Kuglens Brydningsforhold), vil man have

$$\Omega = N\Omega', \quad l' = Nl, \quad \lambda = N\lambda'. \tag{8}$$

Komposanterne ξ, η, ζ ere saavel uden for som inden for Kuglefladen indbyrdes forbundne ved Ligningen $\theta = 0$, som for ω konstant fremgaar af Ligningerne (1), og de kunne derfor fremstilles som afhængige alene af to Størrelser Q og S uden for Kuglen, eller Q' og S' inden for Kuglen. Man vil nemlig kunne sætte

$$\left.\begin{aligned} \xi_e = \frac{dC}{dy} - \frac{dB}{dz}, \quad \eta_e = \frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx}, \quad \zeta_e = \frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy}, \\ A = z\frac{dQ}{dy} - y\frac{dQ}{dz} + xS, \quad B = x\frac{dQ}{dz} - z\frac{dQ}{dx} + yS, \quad C = y\frac{dQ}{dx} - x\frac{dQ}{dy} + zS, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

ligesom ogsaa ξ', η', ζ' kunne udtrykkes paa tilsvarende Maade. Ligningerne (1) ville da være tilfredsstillede under Forudsætning af, at man har

$$\Delta_2 Q + l^2 Q = 0, \quad \Delta_2 S + l^2 S = 0, \tag{10}$$

$$\Delta_2 Q' + l'^2 Q' = 0, \quad \Delta_2 S' + l'^2 S' = 0. \tag{11}$$

Det kan her bemærkes, at de to radielle Projektioner

$$x\xi_e + y\eta_e + z\zeta_e$$

og

$$x\left(\frac{d\zeta_e}{dy} - \frac{d\eta_e}{dz}\right) + y\left(\frac{d\xi_e}{dz} - \frac{d\zeta_e}{dx}\right) + z\left(\frac{d\eta_e}{dx} - \frac{d\xi_e}{dy}\right)$$

ved Hjælp af Ligningerne (9) kunne omdannes til

$$-r^2 \Delta_2 Q + r\frac{d^2 rQ}{dr^2} = -\frac{1}{\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}\sin\varphi\frac{dQ}{d\varphi} - \frac{d^2 Q}{\sin^2\varphi\, d\psi^2}$$

og

$$-r^2 \Delta_2 S + r\frac{d^2 rS}{dr^2} = -\frac{1}{\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}\sin\varphi\frac{dS}{d\varphi} - \frac{d^2 S}{\sin^2\varphi\, d\psi^2}.$$

Heraf ses, at naar Q og S ere udviklede i Række efter Kuglefunktioner Q_n og S_n, nemlig

$$Q = \Sigma Q_n, \quad S = \Sigma S_n,$$

saa ville de ovenstaaende radielle Projektioner være henholdsvis bestemte ved

$$\Sigma n(n+1)\,Q_n \quad \text{og} \quad \Sigma n(n+1)\,S_n\,.$$

Det tilsvarende gjælder for Rummet inden for Kuglen.

De i det foregaaende Afsnit indførte Komposanter $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\zeta}$ kunne vi i Analogi med (6) for Punkter uden for Kuglen udtrykke ved

$$\overline{\xi} = \overline{\xi}_0 + \overline{\xi}_e\,, \quad \overline{\eta} = \overline{\eta}_0 + \overline{\eta}_e\,, \quad \overline{\zeta} = \overline{\zeta}_0 + \overline{\zeta}_e\,, \tag{12}$$

idet disse nye Komposanter ere bestemte ved

$$\overline{\xi}_0 = \sin\varphi\cos\psi\, e^{(kt-lx)i}\,, \quad \overline{\eta}_0 = \cos\varphi\cos\psi\, e^{(kt-lx)i}\,, \quad \overline{\zeta}_0 = -\sin\psi\, e^{(kt-lx)i}\,, \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\xi}_e &= \cos\varphi\,\xi_e + \sin\varphi\cos\psi\,\eta_e + \sin\varphi\sin\psi\,\zeta_e\,,\\
\overline{\eta}_e &= -\sin\varphi\,\xi_e + \cos\varphi\cos\psi\,\eta_e + \cos\varphi\sin\psi\,\zeta_v\,,\\
\overline{\zeta}_e &= \qquad\qquad -\sin\psi\,\eta_e + \cos\psi\,\zeta_e\,.
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Indføres nu for Kortheds Skyld i det følgende Betegnelserne

$$lr = a\,, \quad l'r = a'\,, \quad lQ = K\,, \quad l'Q' = K' \tag{15}$$

og, idet R er den givne Kugles Radius,

$$lR = \alpha\,, \quad l'R = \alpha'\,, \tag{16}$$

saa vil man ved Ligningerne (9) og ved Benyttelse af Ligningerne (10) erholde

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\xi}_e &= \frac{d^2aK}{da^2} + aK\,,\\
\overline{\eta}_e &= \frac{d^2aK}{a\,d\varphi\,da} + \frac{dS}{\sin\varphi\,d\psi}\,,\\
\overline{\zeta}_e &= \frac{d^2aK}{a\sin\varphi\,d\psi\,da} - \frac{dS}{d\varphi}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

ligesom man tilsvarende for et indre Punkt har

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\xi}' &= \frac{d^2a'K'}{da'^2} + a'K'\,,\\
\overline{\eta}' &= \frac{d^2a'K'}{a'd\varphi\,da'} + \frac{dS'}{\sin\varphi\,d\psi}\,,\\
\overline{\zeta}' &= \frac{d^2a'K'}{a'\sin\varphi\,d\psi\,da'} - \frac{dS'}{d\varphi}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Det vil nu være Opgaven at udvikle disse Komposanter i Rækker efter Kuglefunktioner. Naar overhovedet en Funktion $f(x)$ kan udvikles efter Kuglefunktioner, saa er som bekjendt Udviklingen følgende:

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{2}\,P_n(x)\int_{-1}^{1} f(u)\,P_n(u)\,du\,,$$

idet Summen tages for alle hele Værdier af n fra $n = 0$ til $n = \infty$, og

$$P_n(x) = \frac{1\,.\,3\,\ldots\,2n-1}{1\,.\,2\,\ldots\,n}\left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,4\,(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \ldots\right).$$

Søge vi nu først at udvikle de i Ligningerne (13), hvori sættes $lx = a\cos\varphi$, givne Udtryk for $\overline{\xi}_0$, $\overline{\eta}_0$, $\overline{\zeta}_0$, ville vi i Henhold til ovenstaaende have

$$e^{-a\cos\varphi i} = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{2} P_n(\cos\varphi)\int_{-1}^{1} e^{-aui} P_n(u)\, du\,.$$

Det heri indgaaende bestemte Integral lader sig udtrykke ved den Besselske Funktion $J_{n+\frac{1}{2}}(a)$, eller, hvad jeg her vil foretrække, ved en anden ved $v_n(a)$ betegnet Funktion, som kun ved en Faktor er forskjellig fra den Besselske, idet der sættes

$$v_n(a) = \sqrt{\frac{\pi a}{2}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(a)\,.$$

Man vil da, som bekjendt fra de Besselske Funktioners Theori, kunne definere $v_n(a)$ ved

$$v_n(a) = \frac{a^{n+1}}{2^{n+1}[n]}\int_{-1}^{1} e^{-aui}(1-u^2)^n\, du\,.$$

Dette Integral gaar ved n Gange delvis Integration over til

$$v_n(a) = \frac{a}{2^{n+1}[n]\, i^n}\int_{-1}^{1} e^{-aui}\frac{d^n(1-u^2)^n}{du^n}\, du\,,$$

som med Benyttelse af et andet bekjendt Udtryk for P_n, nemlig

$$P_n(u) = \frac{(-1)^n}{2^n[n]}\frac{d^n(1-u^2)^n}{du^n}\,,$$

ogsaa kan gives Formen

$$v_n(a) = \frac{a}{2}\, i^n \int_{-1}^{1} e^{-aui} P_n(u)\, du\,. \tag{19}$$

Paa denne Maade erholdes

$$e^{-a\cos\varphi i} = \frac{1}{a}\sum_0^\infty (2n+1)\, P_n(\cos\varphi)\, e^{-\frac{n\pi}{2}i}\, v_n(a)\,. \tag{20}$$

Det vil bemærkes, at Funktionen $v_n(a)$ tilfredsstiller Differentialligningen

$$\frac{d^2 v_n(a)}{da^2} = \left(\frac{n(n+1)}{a^2} - 1\right) v_n(a)\,, \tag{21}$$

og at den, udviklet efter Potenser af a, giver Rækken

$$v_n(a) = \frac{a^{n+1}}{1\,.\,3\ldots 2n+1}\left(1 - \frac{a^2}{2(2n+3)} + \frac{a^4}{2\,.\,4(2n+3)(2n+5)} - \ldots\right). \tag{22}$$

En anden fra de Besselske Funktioners Theori bekjendt Rækkeudvikling, hvor Leddenes Antal er endeligt, er

$$\left.\begin{aligned} v_n(a) &= g_n(a)\sin\left(a - \frac{n\pi}{2}\right) + h_n(a)\cos\left(a - \frac{n\pi}{2}\right),\\ g_n(a) &= 1 - \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2\,.\,4a^2} + \frac{(n-3)(n-2)\ldots(n+4)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8a^4} - \ldots,\\ h_n(a) &= \frac{n(n+1)}{2a} - \frac{(n-2)(n-1)\ldots(n+3)}{2\,.\,4\,.\,6\,a^3} + \ldots\,. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Betegnes endvidere ved $w_n(a)$ et andet partikulært Integral af Ligning (21), og defineres dette Integral nærmere ved Rækkeudviklingen

$$w_n(a) = \frac{1\,.\,3\ldots 2n-1}{a^n}\left(1+\frac{a^2}{2(2n-1)}+\frac{a^4}{2\,.\,4(2n-1)(2n-3)}+\ldots\right), \tag{24}$$

vil denne Funktion ligeledes kun ved en Faktor være forskjellig fra en Besselsk Funktion, nemlig $J_{-n-\frac{1}{2}}(a)$, og med de ovenfor givne Rækker for g_n og h_n vil den ogsaa kunne udtrykkes ved

$$w_n(a) = g_n(a)\cos\left(a-\frac{n\pi}{2}\right) - h_n(a)\sin\left(a-\frac{n\pi}{2}\right). \tag{25}$$

Af Udviklingen (20) kan nu de i Ligningerne (13) givne Udtryk bestemmes paa følgende Maade. Man udtager af Rækken (20) det første til $n = 0$ svarende Led og sætter

$$P_n(\cos\varphi) = -\frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}\sin\varphi\frac{dP_n(\cos\varphi)}{d\varphi},$$

hvorved erholdes

$$e^{-a\cos\varphi i} = \frac{\sin a}{a} - \frac{1}{a}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{1}{\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}\sin\varphi\frac{dP_n(\cos\varphi)}{d\varphi}e^{-\frac{n\pi}{2}i}v_n(a).$$

Indføres heri til Afkortning Betegnelserne

$$\left.\begin{aligned} K_0 &= -i\frac{\cos\psi}{a}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty\frac{2n+1}{n(n+1)}P_n(\cos\varphi)e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}v_n(a), \\ S_0 &= -\frac{\sin\psi}{a}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty\frac{2n+1}{n(n+1)}P_n(\cos\varphi)e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}v_n(a), \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

vil man ved Multiplikation af Ligningen med $\cos\psi\, e^{kti}\sin\varphi\, d\varphi$ eller med $-\sin\psi\, e^{kti}\sin\varphi\, d\varphi$ og ved Integration af de to saaledes erholdte Ligninger fra $\varphi = 0$ til $\varphi = \varphi$ erholde

$$\left.\begin{aligned} K_0 &= \frac{\cos\psi}{a\sin\varphi}\left(i\sin a\cos\varphi - \cos a + e^{-a\cos\varphi i}\right)e^{kti}, \\ S_0 &= -\frac{\sin\psi}{a\sin\varphi}\left(-\sin a\cos\varphi - i\cos a + ie^{-a\cos\varphi i}\right)e^{kti}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Heraf findes sluttelig

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2aK_0}{da^2} + aK_0 &= \sin\varphi\cos\psi\, e^{(kt-a\cos\varphi)i} = \overline{\xi}_0, \\ \frac{d^2aK_0}{a\,d\varphi\,da} + \frac{dS_0}{\sin\varphi\,d\psi} &= \cos\varphi\cos\psi\, e^{(kt-a\cos\varphi)i} = \overline{\eta}_0, \\ \frac{d^2aK_0}{a\sin\varphi\,d\psi\,da} - \frac{dS_0}{d\varphi} &= -\sin\psi\, e^{(kt-a\cos\varphi)i} = \overline{\zeta}_0. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Disse Udtryk for Komposanterne $\overline{\xi}_0$, $\overline{\eta}_0$, $\overline{\zeta}_0$ svare til de i (17) fremstillede Udtryk for Komposanterne $\overline{\xi}_e$, $\overline{\eta}_e$, $\overline{\zeta}_e$, idet K_0 og S_0 træde i Stedet for K og S i Ligningerne (17). For K_0 og S_0 have vi i (26) Udviklingerne efter Kuglefunktioner, og disse maa, hvad man ogsaa let kan overbevise sig om, tilfredsstille de samme Differentialligninger, som K og S, nemlig ifølge (10) $\Delta_2 K_0 + l^2 K_0 = 0$, $\Delta_2 S_0 + l^2 S_0 = 0$. Udviklingerne af K og S efter Kuglefunktioner maa følgelig blive analog med Udviklingerne (26), idet der her i Stedet for det partikulære Integral $v_n(a)$ af Ligningen (21) indsættes det almindelige Integral, udtrykt lineært ved $v_n(a)$ og $w_n(a)$. Man erholder saaledes med de endnu ubestemte Konstanter k_n, $\varkappa_n$, s_n, σ_n,

$$\left.\begin{aligned} K &= -i\frac{\cos\psi}{a}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}\left(k_n v_n(a) + \varkappa_n w_n(a)\right), \\ S &= -\frac{\sin\psi}{a}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}\left(s_n v_n(a) + \sigma_n w_n(a)\right), \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

og tilsvarende for et indre Punkt

$$\left.\begin{aligned} K' &= -i\frac{\cos\psi}{a'}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}\left(k_n' v_n(a') + \varkappa_n' w_n(a')\right), \\ S' &= -\frac{\sin\psi}{a'}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}\left(s_n' v_n(a') + \sigma_n' w_n(a')\right). \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Heri er $P_n(\cos\varphi)$ afkortet til P_n.

Benytte vi nu først den til $a' = 0$ svarende Grænsebetingelse, ses det af (24), at $w_n(a')$ bliver ∞ for $a' = 0$ og $n > 0$, og at altsaa Endelighedsbetingelsen udkræver

$$\varkappa_n' = 0, \quad \sigma_n' = 0.$$

Til $a = \infty$ svarer ifølge (23) og (25) $v_n(a) = \sin\left(a - \frac{n\pi}{2}\right)$, $w_n(a) = \cos\left(a - \frac{n\pi}{2}\right)$. I uendelig Afstand fra Kuglen vil man altsaa have

$$2\left(k_n v_n(a) + \varkappa_n w_n(a)\right)e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i} = (-k_n i + \varkappa_n)\,e^{(kt+a-n\pi)i} + (k_n i + \varkappa_n)\,e^{(kt-a)i}.$$

Det ses heraf, at Lysbevægelsen i Almindelighed i denne Afstand vil fremtræde som periodiske Funktioner af $kt + a$ og $kt - a$, svarende til to modsatte Bølgebevægelser, den ene bevægende sig henimod Kuglecentret, den anden i Retning fra Centret. Da nu kun denne sidste, ifølge de antagne Betingelser, er virkelig tilstede, maa man have

$$-k_n i + \varkappa_n = 0, \quad \text{ligesom ogsaa tilsvarende} \quad -s_n i + \sigma_n = 0.$$

Saaledes reduceres Rækkerne (29) og (30) til

$$\left.\begin{aligned} K &= -i\frac{\cos\psi}{a}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i} k_n\left(v_n(a) + w_n(a)\,i\right), \\ S &= -\frac{\sin\psi}{a}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i} s_n\left(v_n(a) + w_n(a)\,i\right), \\ K' &= -i\frac{\cos\psi}{a'}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i} k_n' v_n(a'), \\ S' &= -\frac{\sin\psi}{a'}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i} s_n v_n(a'). \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Endelig have vi ogsaa de i (3) og (4) fremstillede Grænsebetingelser, som kunne udtrykkes ved

$$\left.\begin{aligned}\bar{\eta} &= \bar{\eta}', \quad \bar{\zeta} = \bar{\zeta}' \\ \frac{da\bar{\eta}}{da} - \frac{d\bar{\xi}}{d\varphi} &= \frac{da'\bar{\eta}'}{da'} - \frac{d\bar{\xi}'}{d\varphi} \\ \frac{da\bar{\zeta}}{da} - \frac{d\bar{\xi}}{\sin\varphi\, d\psi} &= \frac{da'\bar{\zeta}'}{da'} - \frac{d\bar{\xi}'}{\sin\varphi\, d\psi}\end{aligned}\right\} \begin{aligned} a &= \alpha \\ a' &= \alpha'.\end{aligned}$$

Indsættes heri de ved Ligningerne (12), (17) og (28) givne Udtryk for $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, og for $\bar{\xi}'$, $\bar{\eta}'$, $\bar{\zeta}'$ Udtrykkene (18), kunne disse Betingelser omdannes til

$$\left.\begin{aligned} a(K_0+K) = a'K', \quad S_0+S = S' \\ \frac{da(K_0+K)}{a\,da} = \frac{da'K'}{a'\,da'}, \quad \frac{da(S_0+S)}{da} = \frac{da'\,S}{da'}\end{aligned}\right\} \begin{aligned} a &= \alpha \\ a' &= \alpha'.\end{aligned} \tag{32}$$

Heri udvikles K_0, S_0, K, S, K', S' ved de i (26) og (31) givne Rækker, hvorved erholdes 4 Ligninger imellem Koefficienterne. Betegnes for Kortheds Skyld de afledede Funktioner $\frac{dv_n(\alpha)}{da}$, $\frac{dw_n(\alpha)}{da}$, $\frac{dv_n(\alpha')}{da'}$ ved $v_n'(\alpha)$, $w_n'(\alpha)$, $v_n'(\alpha')$, blive disse Ligninger

$$\begin{aligned} N\big(v_n'(\alpha) + k_n(v_n'(\alpha) + w_n'(\alpha)i)\big) &= k_n' v_n'(\alpha') \\ N\big(v_n(\alpha) + s_n(v_n(\alpha) + w_n(\alpha)i)\big) &= s_n' v_n(\alpha') \\ v_n(\alpha) + k_n(v_n(\alpha) + w_n(\alpha)i) &= k_n' v_n(\alpha') \\ v_n'(\alpha) + s_n(v_n'(\alpha) + w_n'(\alpha)i) &= s_n' v_n'(\alpha').\end{aligned}$$

Heraf kunne de fire Koefficienter bestemmes. Ved Indførelsen af en lille Reduktion ved Hjælp af Ligningen

$$w_n(\alpha)\, v_n'(\alpha) - w_n'(\alpha)\, v_n(\alpha) = 1,$$

vil man saaledes erholde

$$\left.\begin{aligned} 2k_n &= -1 - \frac{(v_n(\alpha) - w_n(\alpha)i)\,v_n'(\alpha') - N(v_n'(\alpha) - w_n'(\alpha)i)\,v_n(\alpha')}{(v_n(\alpha) + w_n(\alpha)i)\,v_n'(\alpha') - N(v_n'(\alpha) + w_n'(\alpha)i)\,v_n(\alpha')}, \\ 2s_n &= -1 - \frac{N(v_n(\alpha) - w_n(\alpha)i)\,v_n'(\alpha') - (v_n'(\alpha) - w_n'(\alpha)i)\,v_n(\alpha')}{N(v_n(\alpha) + w_n(\alpha)i)\,v_n'(\alpha') - (v_n'(\alpha) + w_n'(\alpha)i)\,v_n(\alpha')},\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

$$\left.\begin{aligned} k_n' &= \frac{Ni}{(v_n(\alpha) + w_n(\alpha)i)\,v_n'(\alpha') - N(v_n'(\alpha) + w_n'(\alpha)i)\,v_n(\alpha')}, \\ s_n' &= \frac{Ni}{N(v_n(\alpha) + w_n(\alpha)i)\,v_n'(\alpha') - (v_n'(\alpha) + w_n'(\alpha)i)\,v_n(\alpha')}.\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Den stillede Opgave er hermed for saa vidt løst, som Svingningskomposanterne overalt i Rummet ere bestemte ved uendelige Rækker med bekjendte Koefficienter. Det vil vise sig, at Rækkerne i den givne Form egne sig godt for Beregningen, naar enten α, som svarer til Kuglens Omkreds maalt med Bølgelængden λ, er et lille Tal, eller det betragtede Punkt ligger nær ved Centret, hvorimod det, naar α er et meget stort Tal, hvilket næsten kan siges at være Tilfældet med alle for det blotte Øje synlige Kugler, i Almindelighed vil være nødvendigt, at omdanne Rækkerne saaledes, at Summationerne kunne udføres med tilstrækkelig Tilnærmelse. Jeg skal nu først fremstille de Summationsformler, som herved ville komme til Anvendelse.

3. Summationsformler.

Der vil i det følgende Afsnit fremkomme Summer, som kunne henføres til Formen

$$\sum_{n_1}^{n_2} A_n e^{F_n i}, \tag{35}$$

hvor n gjennemløber Talrækken fra $n = n_1$ til $n = n_2$.

De to Funktioner A_n og F_n ere saaledes beskafne, at naar deri sættes $n = \nu + z$, hvor begge de nye Variable ligeledes betragtes som hele Tal, vil man erholde følgende, inden for de givne Grænser konvergente, Rækker

$$A_n = A + B\frac{z}{a} + C\frac{z^2}{a^2} + \ldots, \quad F_n = Fa + Gz + H\frac{z^2}{a} + I\frac{z^3}{a^2} + \ldots. \tag{36}$$

Leddene ere her ordnede efter stigende Potenser af z og aftagende Potenser af Størrelsen a. Denne sidste betragtes som et meget stort, dog ikke uendelig stort, Tal, og alle Størrelser ville i det følgende blive ordnede efter Potenser af a, saaledes at den Størrelse, som indeholder en højere Potens af a, betragtes som en Størrelse af højere Orden. Her ere Koefficienterne $A, B, \ldots F, G, \ldots$ i det højeste Størrelser af samme Orden som Enheden (a^0). Beregningen skal nu gaa ud paa at fremstille Resultaterne med en saadan Nøjagtighed, at kun Størrelser, som ere af lavere Orden end Enheden, betragtes som saa smaa, at de kunne bortkastes.

Antallet af Led i Rækken (35) er selv et meget stort Tal, af samme Orden som a. Grænserne n_1 og n_2 ere ubestemte og til en vis Grad vilkaarlige, nemlig kun betingede paa den ene Side af Konvergensbetingelserne for Rækkerne (36), paa den anden Side af den Fordring, at $n_2 - n_1$ skal være et meget stort Tal. Denne her indførte Art af ubestemte, vilkaarlige Størrelser, for hvilke jeg i det følgende vil benytte Fællesmærket ω, ere definerede derved, at en Funktion af denne Størrelse betyder den Grænse, hvortil Middelværdien af den samme Funktion af en bestemt Størrelse x konvergerer, naar man lader x gjennemløbe en efterhaanden større og større Række af Værdier inden for de for ω afstukne Grænser.

Gaa vi saaledes ud fra de bekjendte Integraler

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{\mu-1} dx = \Gamma(\mu), \ldots (37) \qquad \int_0^\infty e^{xi} x^{\mu-1} dx = \Gamma(\mu) e^{\frac{\mu\pi}{2} i}; \ldots (38)$$

det første gjældende for alle positive Værdier af μ, det andet kun for de positive Værdier, som ere mindre end 1, saa ses det, at man ogsaa for $\mu < 1$ maa have

$$\int_0^{\omega} e^{xi} x^{\mu-1} dx = \Gamma(\mu) e^{\frac{\mu\pi}{2} i}, \tag{39}$$

idet

$$\int_0^{\omega} e^{xi} x^{\mu-1} dx = \int_0^{\infty} e^{xi} x^{\mu-1} dx - \int_{\omega}^{\infty} e^{xi} x^{\mu-1} dx,$$

hvor det sidste Integral ved delvis Integration kan udvikles i en semikonvergent Række, hvis til forskjellige Værdi af ω svarende Middelværdi konvergerer til 0, naar Middelværdien tages paa den ovenfor angivne Maade imellem videre og videre Grænser. Er i Integralet (39) endvidere $\mu > 1$, kan denne Exponent ved delvis Integration reduceres til at blive mindre end 1, og Middelværdien af de fremkomne periodiske Led uden for Integralet vil ligeledes konvergere til 0. Altsaa er Ligning (39) med den vedtagne Betydning af den øvre Grænse ω gjældende for alle positive Værdier af μ.

Som et andet Exempel, der vil faa Anvendelse i det følgende, kunne vi tage Summen (35) reduceret til den simpleste Form

$$\sum_{n_1}^{n_2} e^{ani} = \frac{e^{an_1 i} - e^{a(n_2+1)i}}{1 - e^{ai}}.$$

Ogsaa her maa højre Side forsvinde, forudsat, at a ikke er 0 eller et Multiplum af 2π, da i saa Tilfælde Summen bliver $n_2 - n_1 + 1$, som vel er ubestemt, men i ethvert Tilfælde ikke kan blive lig Nul. Er endvidere a meget lille eller meget nær ved et Multiplum af 2π, tør man heller ikke betragte Summen som Nul, da Leddenes Antal vel er antaget meget stort, men ikke uendelig stort.

Er Summen Nul, vil den ogsaa vedblive at være det, naar den differentieres et vilkaarligt Antal Gange med Hensyn til a. Man vil altsaa mere almindeligt have

$$\sum_{n_1}^{n_2} n^m e^{ani} = 0, \tag{40}$$

naar m er et helt Tal eller 0, og a ikke er lig med eller ligger meget nær ved 0 eller et Multiplum af 2π.

Betragte vi nu den ved Udviklingerne (35) og (36) givne Sum, ses det, at den kan forandres til en konvergent Række med Led, som med Udeladelse af konstante Faktorer have Formen

$$\sum_{n_1-\nu}^{n_2-\nu} z^m e^{Gzi}.$$

Hvis man altsaa ikke kan have

$$G = 2p\pi, \tag{41}$$

for $p = 0$ eller et helt Tal, og heller ikke $G - 2p\pi$ meget nær lig 0, saa vil hele Summen (35) forsvinde.

Hvis man derimod er i Stand til at finde en Værdi af ν, som gjør det muligt at tilfredsstille ovenstaaende Betingelse (41), saa kan Gz udelades af Exponenten, og Summationen kan nu uden kjendelig Fejl forandres til Integration. Summen (35) vil altsaa kunne gives Formen

$$\int_{-(\nu-n_1)}^{n_2-\nu} dz\left(A+B\frac{z}{a}+\ldots\right)e^{\left(Fa+H\frac{z^2}{a}+I\frac{z^3}{a^2}+\ldots\right)i}, \tag{42}$$

hvor vi ville indskrænke os til at antage ν beliggende imellem n_1 og n_2 og saaledes, at baade $\nu-n_1$ og $n_2-\nu$ komme til at høre til den ovenfor definerede Art af ubestemte Størrelser. Forandres i dette Integral for $z<0$ Fortegnet for z, og sættes derefter $Hz^2 = ax$, ville Grænserne for x, forudsat at H ikke er 0 eller meget lille, høre til den ovenfor ved Fællesmærket ω betegnede Art af Størrelser, og Integralet vil ved Rækkeudvikling gaa over til

$$\int_0^\omega \frac{dx}{2}\left(A\sqrt{\frac{a}{Hx}}+\frac{B}{H}\cdots+\frac{AIxi}{H^2}+\ldots\right)e^{(Fa+x)i}+\int_0^\omega \frac{dx}{2}\left(A\sqrt{\frac{a}{Hx}}-\frac{B}{H}\cdots-\frac{AIxi}{H^2}+\ldots\right)e^{(Fa+x)i}.$$

Disse Integraler ville ifølge (39), idet $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, tilsammen blive

$$A\sqrt{\frac{a\pi}{H}}\,e^{\left(Fa+\frac{\pi}{4}\right)i}, \tag{43}$$

idet de Led, som ere af Ordenen $a^{-\frac{1}{2}}$ og af lavere Orden ere bortkastede. Dette Resultat er ogsaa gjældende for negative Værdier af H, naar det paases, at man i dette Tilfælde maa sætte

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} = -i = e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

Resultatet bliver ugyldigt for

$$H = 0. \tag{44}$$

I dette Tilfælde kunne vi, for yderligere at generalisere det, antage, at $G-2p\pi$ er en meget lille Størrelse. Ogsaa i dette Tilfælde vil Summationen kunne forandres til Integration og i Stedet for (42) vil man erholde Integralet

$$\int_{-(\nu-n_1)}^{n_2-\nu} dz\left(A+B\frac{z}{a}+C\frac{z^2}{a^2}+\ldots\right)e^{\left(Fa+(G-2p\pi)z+I\frac{z^3}{a^2}+K\frac{z^4}{a^3}+L\frac{z^5}{a^4}\cdots\right)i}. \tag{45}$$

Heri forandres ligeledes for $z<0$ Fortegnet for z, og derefter sættes $\pm Iz^3 = a^2x$, hvor det dobbelte Fortegn bestemmes saaledes, at $\pm I$ bliver positiv. Indføres for Kortheds Skyld Betegnelserne

$$G-2p\pi = -\varepsilon\sqrt[3]{\frac{I}{a^2}}, \tag{46}$$

$$\int_0^\omega x^{-\frac{2}{3}}\cos\left(-\varepsilon x^{\frac{1}{3}}+x\right)dx = Q, \tag{47}$$

samt

$$A = A_1 I, \quad B = B_1 I, \quad C = C_1 I, \quad K = K_1 I, \quad L = L_1 I, \tag{48}$$

vil man uden Vanskelighed kunne give Integralet (45) Formen

$$\pm \tfrac{2}{3} e^{Fai} \Big[(\alpha I)^{\frac{2}{3}} A_1 Q + (\alpha I)^{\frac{1}{3}} i \Big(B_1 \frac{dQ}{d\varepsilon} + A_1 K_1 \frac{d^4 Q}{d\varepsilon^4} \Big) - C_1 \frac{d^2 Q}{d\varepsilon^2}$$
$$- (A_1 L_1 + B_1 K_1) \frac{d^5 Q}{d\varepsilon^5} - \tfrac{1}{2} A_1 K_1^2 \frac{d^8 Q}{d\varepsilon^8} \Big], \tag{49}$$

idet Leddene af Ordenen $\alpha^{-\frac{1}{3}}$ og derunder bortkastes.

I Tilfælde af, at man har $\varepsilon = 0$, erholdes ved Hjælp af (39)

$$\Gamma\Big(\frac{1}{3}\Big) \cos\frac{\pi}{6} = Q = -3 \frac{d^3 Q}{d\varepsilon^3}, \quad \Gamma\Big(\frac{2}{3}\Big) \cos\frac{\pi}{6} = \frac{dQ}{d\varepsilon} = -\frac{3}{2} \frac{d^4 Q}{d\varepsilon^4},$$

$$0 = \frac{d^2 Q}{d\varepsilon^2} = \frac{d^5 Q}{d\varepsilon^5} = \frac{d^8 Q}{d\varepsilon^8},$$

hvor

$$\Gamma\Big(\frac{1}{3}\Big) = 2{,}67894\ldots, \quad \Gamma\Big(\frac{2}{3}\Big) = 1{,}35412\ldots,$$

eller ved sædvanlige Logarithmer

$$\operatorname{Log} \Gamma\Big(\frac{1}{3}\Big) = 0{,}4279627\ldots, \quad \operatorname{Log} \Gamma\Big(\frac{2}{3}\Big) = 0{,}1316565\ldots.$$

Herved gaar (49) over til

$$\pm \frac{1}{\sqrt{3}} e^{Fai} \Big[(\alpha I)^{\frac{2}{3}} A_1 \Gamma\Big(\frac{1}{3}\Big) + (\alpha I)^{\frac{1}{3}} i \Big(B_1 - \frac{2}{3} A_1 K_1 \Big) \Gamma\Big(\frac{2}{3}\Big) \Big]. \tag{50}$$

Integralet Q (47) har under en noget anden Form været numerisk beregnet af Airy[1]), som for Integralet

$$\int_0^\infty d\omega \cos\frac{\pi}{2} (\omega^3 - m\omega) = W$$

har angivet følgende Tavle

m	W	m	W
-5	0,00041	0	0,66527
-4	0,00298	1	1,00041
-3	0,01730	2	0,56490
-2	0,07908	3	$-0{,}56322$
-1	0,27283	4	$-0{,}47446$
		5	0,68182.

[1]) On the intensity of Ligth in the neighbourhood of a Caustic. Trans. of the Cambr. Soc. t. VI, p. 379, t. VIII, p. 595

Ved Hjælp heraf kan ogsaa Q beregnes, idet man har

$$\varepsilon = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} m\,, \quad Q = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} W.$$

Gaa vi fra $m = 0$ til den negative Side, saa er W stadig aftagende indtil 0, gaa vi til den positive Side er W først voxende, naaer et Maximum ved $m = 1{,}08$, og nærmer sig derefter gjennem en periodisk Bevægelse omkring Nulpunktet ligeledes til 0. Det første og største Maximum af W er 1,504 Gange større end Værdien af W for $m = 0$.

Stokes[1]) har udvidet den Airy'ske Beregning til de 50 første Rødder i Ligningen $W = 0$ og de 10 første Rødder i $\frac{dW}{dm} = 0$. Saaledes svarer til $W = 0$

$$m = 2{,}4955;\ 4{,}3631;\ 5{,}8922;\ 7{,}2436;\ 8{,}4788;\ \ldots$$

i hvilken Række den q-de Rod med voxende q konvergerer til $3\left(q - \frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$. Ligeledes er for $\frac{dW}{dm} = 0$

$$m = 1{,}0845;\ 3{,}4669;\ 5{,}1446;\ 6{,}5782;\ 7{,}8685;\ \ldots$$

hvor den q-de Rod konvergerer til $3\left(q - \frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$.

De forskjellige Differentialkoefficienter af Q med Hensyn til ε, som indgaa i Udtrykket (49), ville alle let kunne udtrykkes ved Q og $\frac{dQ}{d\varepsilon}$, idet det bemærkes, at man har

$$\frac{d^2Q}{d\varepsilon^2} = -\frac{\varepsilon}{3}Q\,,$$

hvoraf atter de højere Differentialkoefficienter kunne afledes, for Exempel

$$\frac{d^4Q}{d\varepsilon^4} = \frac{\varepsilon^2}{9}Q - \frac{2}{3}\frac{dQ}{d\varepsilon}\,, \quad \text{o. s. v.}$$

Maximal- og Minimalpunkterne for $\frac{dQ}{d\varepsilon}$ svare altsaa til $Q = 0$, hvoraf ses, at det første Maximum her først indtræder for $m = 2{,}4955\ldots$. Modulus (eller Amplituden) for det i (49) givne Udtryk forandrer sig med voxende ε paa tilsvarende Maade som Integralet W, hvis man alene behøver at tage det første Led, som er af højeste Orden, i Betragtning, men hvis ogsaa de følgende Led i Udtrykket faa Betydning, vil Modulus komme til at indeholde saavel Q som $\frac{dQ}{d\varepsilon}$, hvoraf følger, at Maximalpunkterne ville blive forskudte, og at i Almindelighed Modulus ikke ved de periodiske Forandringer vil kunne blive 0. Periodiciteten vil saaledes blive mere udvisket.

Ved Sammenligning mellem de to i (43) og (49) givne Udtryk for Integralet (42) ses det, at det første er af Størrelsesordenen $\alpha^{\frac{1}{2}}$, det andet af Ordenen $\alpha^{\frac{2}{3}}$. Hvorledes Overgangen sker fra det ene Udtryk til det andet, kan ses, naar man tænker sig H aftagende til en meget lille Størrelse samtidig med, at man beholder $G - 2p\pi = 0$. Man

[1]) Trans. of the Cambr. Phil. Soc. t. 9. p. 166.

vil da i Integralet (42) kunne sætte $z = z' + \delta$ og bestemme δ saaledes, at Koefficienten til z'^2 i Exponenten bliver 0. Herved komme vi til den i (45) antagne Form, hvor $G - 2p\pi$ bliver lig $-\frac{H^2}{3I}$, og altsaa

$$3\varepsilon = H^2 \sqrt[3]{\frac{a^2}{I^4}}.$$

Det ses heraf, at ved denne Overgang fra Integralet (42) til Integralet (45) vil ε nødvendigvis forblive positiv. Overgangen fra (43) til (49) sker altsaa gjennem den ovenfor beskrevne periodiske Bevægelse ved positiv aftagende m eller ε, hvorved det sidste og største Maximum naas forinden ε bliver 0, medens herfra Modulus hurtig aftager til 0, samtidig med at ε gjennem 0 gaar over til lavere og lavere negative Værdier.

Vi ville endelig ogsaa i det følgende Afsnit møde Summer, som lade sig omdanne til et Integral af Formen

$$\int_0^{z_1} dz\left(A\frac{z}{a} + B\frac{z^3}{a^3} + \ldots\right)e^{\left(Fa + G\frac{z^2}{a} + H\frac{z^4}{a^3} + I\frac{z^6}{a^5} + \ldots\right)i}. \tag{51}$$

Naar heri sættes $Gz^2 = ax$ og G ikke er 0 eller meget lille, vil den øvre Grænse for x høre til den ovenfor ved ω betegnede Art af Størrelser, og idet Leddene af lavere Orden end Enheden bortkastes, vil Resultatet af Integrationen blive

$$\frac{A}{2G}e^{\left(Fa + \frac{\pi}{2}\right)i}. \tag{52}$$

Er derimod G meget lille, sættes $Hz^4 = a^3x^2$, den øvre Grænse for x betegnes ligesom før ved ω, og til Afkortning sættes

$$G = \pm\varepsilon\sqrt{\frac{H}{a}}, \tag{53}$$

idet det øverste Fortegn svarer til G positiv, det nederste til G negativ. Integralet gaar herved over til

$$\frac{1}{2H}\int_0^{\omega} dx\left((aH)^{\frac{1}{2}}A + Bx + \frac{AIi}{H}x^3\right)e^{(Fa \pm \varepsilon x + x^2)i}. \tag{54}$$

For $\varepsilon = 0$ erholdes heraf ved Integration

$$\frac{A}{4}\sqrt{\frac{a\pi}{H}}e^{\left(Fa + \frac{\pi}{4}\right)i} + \frac{1}{4H^2}(BH - AI)e^{\left(Fa + \frac{\pi}{2}\right)i}, \tag{55}$$

medens det almindelige Integral (54) lader sig udtrykke ved

$$\frac{e^{Fai}}{2H}\left((aH)^{\frac{1}{2}}AQ \mp iB\frac{dQ}{d\varepsilon} \mp \frac{AI}{H}\frac{d^3Q}{d\varepsilon^3}\right), \tag{56}$$

idet

$$Q = \int_0^{\omega} dx\, e^{(\pm\varepsilon x + x^2)i}. \tag{57}$$

Af dette sidste Integral erholdes ved Differentiation med Hensyn til ε og delvis Integration

$$\frac{dQ}{d\varepsilon} = \mp \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon i}{2} Q, \tag{58}$$

hvoraf endvidere findes

$$\frac{d^3 Q}{d\varepsilon^3} = \pm \left(\frac{i}{2} + \frac{\varepsilon^2}{8}\right) + \left(-\frac{3\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon^3 i}{8}\right) Q \,. \tag{59}$$

Ved Indsættelsen af disse Værdier i (56), vil dette Udtryk for det søgte Integral være bestemt ved bekjendte Størrelser og ved Integralet Q.

Dette sidste Integral har under forskjellige Former ofte været behandlet, navnlig ved Beregningen af Bøjningsfænomener, saaledes af Fresnel, Cauchy, Knochenhauer, Quet, o. a. En større Tavle har været beregnet af Ph. Gilbert[1]) for de to Funktioner N og M, bestemte ved

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\omega dx\, e^{(\varepsilon x + x^2)i} = N + Mi\,, \quad \varepsilon = \sqrt{2\pi}\,\mu\,,$$

og omfattende alle Værdier fra $\mu^2 = 0{,}00$ til $\mu^2 = 30{,}00$.

Naar altsaa i Integralet Q øverste Fortegn læses, kan dette Integral beregnes umiddelbart ved denne Tavle. Læses nederste Fortegn, og sættes

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\omega dx\, e^{(-\varepsilon x + x^2)i} = N_1 + M_1 i\,,$$

vil man have

$$N + N_1 + (M + M_1) i = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\omega}^\omega dx\, e^{(\varepsilon x + x^2)i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi - \varepsilon^2}{4} + i \sin\frac{\pi - \varepsilon^2}{4}\right),$$

hvorved N_1 og M_1 erholdes bestemte ved

$$N_1 = \sqrt{2}\cos\frac{\pi - \varepsilon^2}{4} - N\,, \quad M_1 = \sqrt{2}\sin\frac{\pi - \varepsilon^2}{4} - M\,.$$

Begge Størrelserne N og M aftage hurtig og vedvarende med voxende ε, hvoraf følger, at N_1 og M_1 ere periodiske Funktioner. Da man ifølge (58), naar nederste Fortegn læses, har

$$\frac{dN_1}{d\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\varepsilon}{2} M_1\,, \quad \frac{dM_1}{d\varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{2} N_1\,,$$

bliver

$$N_1 \frac{dN_1}{d\varepsilon} + M_1 \frac{dM_1}{d\varepsilon} = \frac{N_1}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

Heraf ses, at Maximum og Minimum for $N_1^2 + M_1^2$ svarer til $N_1 = 0$, som atter for store Værdier af ε tilnærmelsesvis vil svare til $\cos\frac{\pi - \varepsilon^2}{4} = 0$, altsaa til $\varepsilon^2 = (4p - 1)\pi$ eller $\mu = \sqrt{\frac{4p-1}{2}}$, idet p er et helt Tal.

[1]) Recherches anal. sur la diffraction de la lumière. Mém. cour. de l'Acad. de Bruxelles, t. XXXI, p. 1, 1862—63.

Ifølge Gilbert er

$$N_1^2 + M_1^2 = 2{,}7407 \text{ ved } \mu = 1{,}2172\,, \quad \left(\sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}2247\right), \quad \text{1ste Max.}$$

$$1{,}5562 \text{ ved } \mu = 1{,}8725\,, \quad \left(\sqrt{\frac{7}{2}} = 1{,}8708\right), \quad \text{1ste Min.}$$

$$2{,}3985 \text{ ved } \mu = 2{,}3445\,, \quad \left(\sqrt{\frac{11}{2}} = 2{,}3452\right), \quad \text{2det Max.}$$

$$1{,}6864 \text{ ved } \mu = 2{,}7390\,, \quad \left(\sqrt{\frac{15}{2}} = 2{,}7386\right), \quad \text{2det Min.}$$

Til $\mu = 0$ svarer $N_1^2 + M_1^2 = \frac{1}{2}$, til $\mu = \infty$ $N_1^2 + M_1^2 = 2$.

Tage vi kun Hensyn til Leddet af den højeste Orden ($a^{\frac{1}{2}}$) i (56), vil det af det ovenfor udviklede fremgaa, at dette Udtryks Modulus voxer fra 0 ved $G = +\infty$ indtil $\frac{A}{4}\sqrt{\frac{a\pi}{H}}$ ved $G = 0$, voxer yderligere med aftagende G indtil $2{,}3412 \,.\, \frac{A}{4}\sqrt{\frac{a\pi}{H}}$ ved $G = -1{,}2172\sqrt{\frac{2\pi H}{a}}$, og naar sluttelig gjennem aftagende periodiske Svingninger til det dobbelte af den til $G = 0$ svarende Værdi.

4. a meget stor. Bevægelsen i Hovedaxen.

Ligesom i det foregaaende Afsnit betragtes her a som et meget stort Tal, og Lysbevægelsen skal søges bestemt saaledes, at kun Størrelser, som ere af lavere Orden end Enheden bortkastes.

Vi ville først søge at bestemme Bevægelsen i Nærheden af Kuglens Centrum, idet a', som er det betragtede Punkts Afstand fra Centret, maalt med $\frac{\lambda'}{2\pi}$ som Længdeenhed, betragtes som et i Forhold til a og a' meget lille Tal. Under denne Betingelse vil $v_n(a')$, bestemt ved Rækken (22) blive meget lille, naar n nærmer sig i Størrelse til a, hvorfor Leddene i Rækkerne (31) for K' og S' kun faa Betydning for de lavere Værdier af n. I de ved (34) givne Udtryk for k_n' og s_n' vil man derfor ogsaa i Henhold til (23) og (25) kunne sætte

$$v_n(a) = \sin\left(a - \frac{n\pi}{2}\right), \quad v_n(a') = \sin\left(a' - \frac{n\pi}{2}\right), \quad w_n(a) = \cos\left(a - \frac{n\pi}{2}\right).$$

Saaledes erholdes

$$\left.\begin{aligned} s'_{2n+1} &= k'_{2n} = k'_0 = e^{ai}\frac{N}{\cos a' + iN\sin a'}\,, \\ s'_{2n} &= k'_{2n+1} = s'_0 = e^{ai}\frac{N}{N\cos a' + i\sin a'}\,. \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Rækkerne (31) gaa herved over til

$$K' = -i\frac{\cos\psi}{2a'}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty\frac{2n+1}{n(n+1)}e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}\left[(P_n(\cos\varphi)+P_n(-\cos\varphi))k_0'+(P_n(\cos\varphi)-P_n(-\cos\varphi))s_0'\right]v_n(a'),$$

$$S' = -\frac{\sin\psi}{2a'}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty\frac{2n+1}{n(n+1)}e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}\left[(P_n(\cos\varphi)+P_n(-\cos\varphi))s_0'+(P_n(\cos\varphi)-P_n(-\cos\varphi))k_0'\right]v_n(a').$$

Disse Rækker kunne summeres ved Hjælp af Ligningerne (26) og (27), hvorved findes

$$K' = -i\frac{\cos\psi}{a'\sin\varphi}e^{kti}\left[(-\sin a'\cos\varphi+\sin(a'\cos\varphi))k_0'+i(-\cos a'+\cos(a'\cos\varphi))s_0'\right],$$

$$S' = -\frac{\sin\psi}{a'\sin\varphi}e^{kti}\left[(-\sin a'\cos\varphi+\sin(a'\cos\varphi))s_0'+i(-\cos a'+\cos(a'\cos\varphi))k_0'\right].$$

Indsættes nu disse Værdier i Ligningerne (18) og sættes til Afkortning

$$e^{kti}(-i\sin(a'\cos\varphi)k_0'+\cos(a'\cos\varphi)s_0') = Q,$$

erholdes

$$\bar{\xi}' = \sin\varphi\cos\psi\,Q, \quad \bar{\eta}' = \cos\varphi\cos\varphi\,Q, \quad \bar{\zeta}' = -\sin\psi\,Q.$$

Heraf findes atter Komposanterne med Hensyn til de faste Axer

$$\xi' = 0, \quad \eta' = Q, \quad \zeta' = 0.$$

Indsættes den ovenfor givne Værdi af Q, erholdes ved en lille Omforming

$$\eta' = e^{(kt-a'\cos\varphi)i}\frac{k_0'+s_0'}{2} - e^{(kt+a'\cos\varphi)i}\frac{k_0'-s_0'}{2}. \tag{61}$$

Den fysiske Betydning af dette Resultat fremgaar bedst, naar de i (60) givne Værdier af k_0' og s_0' udvikles i Række, efter at $\cos a'$ og $\sin a'$ ere udtrykte i exponentiel Form, nemlig

$$k_0' = \frac{2N}{N+1}\sum_0^\infty\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^m e^{(a-(2m+1)a')i}, \quad s_0' = \frac{2N}{N+1}\sum_0^\infty\left(\frac{1-N}{1+N}\right)^m e^{(a-(2m+1)a')i},$$

hvor m gjennemløber Talrækken fra 0 til ∞. Saaledes erholdes

$$\eta' = \frac{2N}{N+1}\sum_0^\infty\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^{2m} e^{(kt-a'\cos\varphi+a-(4m+1)a')i} - \frac{2N}{N+1}\sum_0^\infty\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^{2m+1} e^{(kt+a'\cos\varphi+a-(4m+3)a')i}. \tag{62}$$

Paa denne Maade er Lysbevægelsen i Nærheden af Centret fremstillet som en Sum af Svingninger, der ere parallele med de indfaldende Straalers Svingninger og tilhøre to Sæt af Straaler, det ene gaaende i de indfaldende Straalers Retning, tilbagekastet et lige Antal Gange eller slet ikke fra de indre Kuglefiader, det andet gaaende i modsat Retning efter et ulige Antal Tilbagekastninger. Ved Straalernes Indtrædelse i Kuglen er Udslaget forandret efter Forholdet $1+N$ til $2N$ og ved hver Tilbagekastning efter Forholdet $1+N$ til $1-N$, medens Fasen svarer til den tilbagelagte optiske Vejlængde, alt overensstemmende med de Resultater, man kommer til ved den elementære Betragtningsmaade, naar de to brydende Flader betragtes som plane og vinkelrette paa de indfaldende Straaler.

Naar det betragtede Punkt ikke ligger meget nær ved Centret, maa man tage Hensyn til de Led i Rækkerne, som svare til meget store Værdier af n. Det vil derfor først være nødvendigt at søge hertil passende Udviklinger for Funktionerne v_n og w_n.

Man har identisk

$$v_n = \sqrt{v_n^2 + w_n^2} \sin \operatorname{arc} tg \frac{v_n}{w_n}, \quad w_n = \sqrt{v_n^2 + w_n^2} \cos \operatorname{arc} tg \frac{v_n}{w_n},$$

eller, naar man sætter

$$v_n^2 + w_n^2 = q_n, \quad \operatorname{arc} tg \frac{v_n}{w_n} = \lambda_n,$$

$$v_n = \sqrt{q_n} \sin \lambda_n, \quad w_n = \sqrt{q_n} \cos \lambda_n. \tag{63}$$

Med Benyttelse af Ligningen

$$w_n v_n' - w_n' v_n = 1$$

erholdes endvidere, naar den Variable betegnes ved a,

$$\frac{d\lambda_n}{da} = \frac{1}{q_n}, \tag{64}$$

hvoraf atter ved Integration, idet til $a = \infty$ svarer $\lambda_n = a - \frac{n\pi}{2}$,

$$\lambda_n = a - \frac{n\pi}{2} - \int_a^\infty da \left(\frac{1}{q_n} - 1\right). \tag{65}$$

Af de i (23) og (25) givne Rækker for v_n og w_n findes

$$q_n = 1 + \frac{n(n+1)}{a^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{a^4} \cdot \frac{1 \, . \, 3}{2 \, . \, 4} + \dots \, . \tag{66}$$

Er nu a et meget stort Tal af Størrelsesordenen α og kunne alle Størrelser som ere af Ordenen α^{-1} eller af lavere Orden lades ude af Betragtning ved Siden af samme Orden som Enheden, saa vil man for alle Værdier af n indtil en vis Grænse, som ligger lavere end a, og hvor endnu Differensen $a - \left(n + \frac{1}{2}\right)$ kan henregnes til Størrelsesordenen α, ved Summation af Rækken (66) erholde

$$q_n = \frac{a}{\sqrt{a^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}}, \quad a > n + \tfrac{1}{2}. \tag{67}$$

Indsættes dette Udtryk for q_n i (65), hvor det maa forblive gjældende for alle Integralets Elementer, erholdes ved Integration

$$\lambda_n = \sqrt{a^2 - \left(n + \tfrac{1}{2}\right)^2} - \frac{n\pi}{2} + \left(n + \tfrac{1}{2}\right) \operatorname{arc} \sin \frac{n + \frac{1}{2}}{a}. \tag{68}$$

Til Funktionsbetegnelserne q_n og λ_n vil i det følgende blive tilføjet den Variable, som her for Kortheds Skyld har været udeladt.

Saalænge Ligning (67) er gjældende, ville Differentialkoefficienterne af $q_n(a)$ og $q_n(a')$ med Hensyn til a og a' kunne bortkastes ved Siden af Størrelser af Ordenen α^0, som $q_n(a)$, $q_n(a')$. Gaa vi nu tilbage til Koefficientligningerne (33) og (34) og indføres for Kortheds Skyld følgende Betegnelser

$$\frac{Nq_n(a')-q_n(a)}{Nq_n(a')+q_n(a)}=b_n\,,\qquad \frac{2\,Nq_n(a)q_n(a')\,(Nq_n(a')-q_n(a))^m}{(Nq_n(a')+q_n(a))^{m+2}}=b_{n,m}\,,$$

$$\frac{q_n(a')-Nq_n(a)}{q_n(a')+Nq_n(a)}=c_n\,,\qquad \frac{2\,Nq_n(a)q_n(a')\,(q_n(a')-Nq_n(a))^m}{(q_n(a')+Nq_n(a))^{m+2}}=c_{n,m}\,,$$

$$\frac{2N\sqrt{q_n(a)q_n(a')}\,(Nq_n(a')-q_n(a))^m}{(Nq_n(a')+q_n(a))^{m+1}}=\beta_{n,m}\,,\qquad \frac{2N\sqrt{q_n(a)\,q_n(a')}\,(q_n(a')-Nq_n(a))^m}{(q_n(a')+Nq_n(a))^{m+1}}=\gamma_{n,m}\,,$$

saa vil man kunne udtrykke Koefficienterne ved Brøker, som lade sig udvikle i følgende konvergente Rækker:

$$\left.\begin{aligned}
2k_n &= -1-b_n e^{2\lambda_n(a)i}+\sum_{m=0}^{m=\infty}2\,b_{n,m}e^{2(\lambda_n(a)-(m+1)\lambda_n(a'))i}\,,\\
2s_n &= -1-c_n e^{2\lambda_n(a)i}+\sum_{m=0}^{m=\infty}2\,c_{n,m}e^{2(\lambda_n(a)-(m+1)\lambda_n(a'))i}\,,\\
k_n' &= \sum_{m=0}^{m=\infty}\beta_{n,m}e^{(\lambda_n(a)-(2m+1)\lambda_n(a'))i}\,,\quad s_n'=\sum_{m=0}^{m=\infty}\gamma_{n,m}e^{(\lambda_n(a)-(2m+1)\lambda_n(a'))i}\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(69)$$

Idet vi dernæst gaa over til Summationen af Rækkerne (31), ville vi i dette Afsnit indskrænke os til det Tilfælde, at det betragtede Punkt ligger i x-Axen (Hovedaxen). Det vil bemærkes, at man har

$$\text{for }\cos\varphi=1\,,\quad \frac{d\,P_n(\cos\varphi)}{\sin\varphi\,d\varphi}=\frac{d^2P_n(\cos\varphi)}{d\varphi^2}=-\frac{n(n+1)}{2}\,,$$

$$\text{for }\cos\varphi=-1\,,\quad \frac{d\,P_n(\cos\varphi)}{\sin\varphi\,d\varphi}=-\frac{d^2P_n(\cos\varphi)}{d\varphi^2}=\left(-1\right)^n\frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Naar nu de givne Rækker for K og S indsættes i (17), for K' og S' i (18), og man dernæst bestemmer Komposanterne med Hensyn til de faste Axer ved Hjælp af Ligningerne

$$\begin{aligned}
\xi &= \cos\varphi\,\bar\xi-\sin\varphi\,\bar\eta\,,\\
\eta &= \sin\varphi\cos\psi\,\bar\xi+\cos\varphi\cos\psi\,\bar\eta-\sin\psi\,\bar\zeta\,,\\
\zeta &= \sin\varphi\sin\psi\,\bar\xi+\cos\varphi\sin\psi\,\bar\eta+\cos\psi\,\bar\zeta\,,
\end{aligned}$$

og de tilsvarende Ligninger for et indre Punkt, saa vil man finde, at Svingningerne overalt i Hovedaxen gaa i Retning af y-Axen, hvad da ogsaa er en umiddelbar Følge af, at hele Lysbevægelsen er symmetrisk med Hensyn til xy-Planen, samt at Svingningsudslagene uden for og inden for Kuglen ville være bestemte ved

$$\left.\begin{aligned}
\eta &= e^{(kt\mp a)i}+\sum_1^\infty\frac{n+\frac12}{a}e^{\left(kt\mp\frac{n\pi}{2}\right)i}\left(\pm ik_n(v_n'(a)+w_n'(a)i)+s_n(v_n(a)+w_n(a)i)\right),\\
\eta' &= \sum_1^\infty\frac{n+\frac12}{a'}e^{\left(kt\mp\frac{n\pi}{2}\right)i}\left(\pm ik_n'v_a'(a')+s_n'v_n(a')\right),
\end{aligned}\right\}\qquad(70)$$

øverste Fortegn gjældende for x-Axens positive, nederste for dens negative Side.

De heri indgaaende Funktioner af n lade sig udvikle efter Potenser af $n+\frac{1}{2}$ i Rækker, som forblive konvergente indtil en vis Grænse $n = n_1$, indtil hvilken Grænse vi da først ville udføre de angivne Summationer. Saaledes vil det i (68) givne Udtryk for $\lambda_n(a)$ kunne udvikles i følgende Række

$$\lambda_n(a) = a - \frac{n\pi}{2} + \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{a} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^4}{3a^3} \cdot \frac{1}{2.4} + \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^6}{5a^5} \cdot \frac{1.3}{2.4.6} + \dots \tag{71}$$

For q_n haves Rækkeudviklingen (66) og af Ligningerne (63) erholdes

$$v_n(a) + w_n(a)i = i\sqrt{q_n(a)}\, e^{-\lambda_n(a)i},$$

samt med Bortkastelse af $q_n'(a)$ ifølge (64)

$$v_n'(a) + w_n'(a)i = \frac{1}{\sqrt{q_n(a)}} e^{-\lambda_n(a)i}.$$

Vi ville nu særlig udtage de enkelte Led, hvoraf Ligningerne (69) for Koefficienterne bestaa, og begynde med at sætte

$$2k_n = -1, \quad 2s_n = -1.$$

Med disse Forudsætninger vil den første Ligning (70) give

$$\eta = e^{(kt\mp a)i} - i\sum_1^{n_1} \frac{n+\frac{1}{2}}{2a}\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{q_n(a)}} + \sqrt{q_n(a)}\right) e^{\left(kt\mp\frac{n\pi}{2}-\lambda_n(a)\right)i}.$$

Naar heri indsættes den i (71) givne Række for $\lambda_n(a)$, vil det ses, at Exponenten kommer til at indeholde Leddet $\frac{n\pi}{2}(\mp 1 + 1)$. Naar nederste Fortegn læses, vil dette Led blive $n\pi$, og i Henhold til det i foregaaende Afsnit udviklede vil Summen blive 0. Altsaa er for x-Axens negative Side

$$\eta = e^{(kt+a)i}.$$

Naar derimod øverste Fortegn læses, kan Summen, idet der sættes $n+\frac{1}{2} = z$, forandres til et Integral af Formen (51), og ved Sammenligningen erholdes

$$A = \frac{\alpha}{a}, \quad F\alpha = kt - a, \quad G = -\frac{\alpha}{2a},$$

medens ifølge (52) Integralet bliver lig med

$$-e^{\left(kt-a+\frac{\pi}{2}\right)i}.$$

Altsaa er for x-Axens positive Side

$$\eta = e^{(kt-a)i} + ie^{\left(kt-a+\frac{\pi}{2}\right)i} = 0.$$

Den her fremstillede Del af Bevægelsen er saaledes intet andet end den indfaldende Centralstraale indtil det Punkt, hvor den træffer Kuglen.

Udtages dernæst det andet Led af de to første Ligninger (69) og sættes

$$2k_n = -b_n e^{2\lambda_n(a)i}, \quad 2s_n = -c_n e^{2\lambda_n(a)i},$$

vil Summen i Udtrykket (70) for η komme til at indeholde Exponenten

$$\left(kt - a + 2a + \frac{n\pi}{2}(\mp 1 - 1) + \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{2}\left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{a}\right) + \ldots\right)i.$$

Her maa, naar øverste Fortegn læses, Summen blive 0. Med nederste Fortegn vil derimod Summen ligesom før kunne omdannes til et Integral af Formen (51), og ved Sammenligningen erholdes

$$A = \frac{N-1}{N+1}\frac{a}{a}i, \quad Fa = kt - a + 2a, \quad G = \frac{a}{2}\left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{a}\right).$$

Ifølge (52) vil altsaa Integralet blive lig med

$$-\frac{N-1}{N+1}\cdot\frac{1}{a\left(-\frac{1}{a}+\frac{2}{a}\right)}e^{(kt-a+2a)i}. \tag{72}$$

Denne Del af Bevægelsen svarer til den fra den forreste Del af Kuglefladen tilbagekastede Centralstraale, og Resultatet er det samme som det, man ad elementær Vej vil kunne udlede, idet Fasen bestemmes ved den tilbagelagte optiske Vejlængde, og Amplituden efter Tilbagekastningen er $-\frac{N-1}{N+1}$ i selve Kuglefladen, altsaa i Afstanden $\frac{1}{2}a$ (Afstandene maalte med $\frac{\lambda}{2\pi}$ som Længdeenhed) fra Centralstraalernes indbildte Brændpunkt, og derefter maa aftage i samme Forhold, som det betragtede Punkt fjerner sig fra dette Brændpunkt.

Udtages endelig det Led af Ligningerne (69), som svarer til

$$k_n = b_{n,m}e^{2(\lambda_n(a)-(m+1)\lambda_n(a'))i}, \quad s_n = c_{n,m}e^{2(\lambda_n(a)-(m+1)\lambda_n(a'))i},$$

vil Udslaget være bestemt ved

$$\sum_1^{n_1} i\frac{n+\frac{1}{2}}{a\sqrt{q_n(a)}}(\pm b_{n,m} + c_{n,m}q_n(a))e^{\left(kt \mp \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a) + 2\lambda_n(a) - (2m+2)\lambda_n(a')\right)i}.$$

Udviklet efter Potenser af $n+\frac{1}{2}$ vil denne Exponent blive

$$\left(kt - a + 2a - (2m+2)a' + \frac{n\pi}{2}(\mp 1 + 2m + 1) + \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{2}\left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{a} - \frac{2m+2}{a'}\right) + \ldots\right)i.$$

Summen vil forsvinde, med mindre man har

$$\mp 1 + 2m + 1 = 4p,$$

det vil sige, med mindre m er et lige Tal, naar Punktet ligger paa x-Axens positive Side (øverste Fortegn), eller m er ulige, naar Punktet ligger paa den negative Side. Dette forudsat, kan Summen forandres til et Integral af Formen (51) og ved Sammenligningen erholdes

$$A = i\frac{a}{a}\frac{4N(1-N)^m}{(1+N)^{m+2}}, \qquad B = 0,$$

$$Fa = kt - a + 2a - (2m+2)a', \qquad G = \frac{a}{2}\left(-\frac{1}{a}+\frac{2}{a}-\frac{2m+2}{a'}\right),$$

$$H = \frac{a^3}{24}\left(-\frac{1}{a^3}+\frac{2}{a^3}-\frac{2m+2}{a'^3}\right), \qquad I = \frac{a^5}{80}\left(-\frac{1}{a^5}+\frac{2}{a^5}-\frac{2m+2}{a'^5}\right).$$

Ifølge (52), som forudsætter, at G ikke er meget lille, vil Resultatet af Integrationen blive

$$-\frac{4N(1-N)^m}{(1+N)^{m+2}}\cdot\frac{1}{a\left(-\frac{1}{a}+\frac{2}{a}-\frac{2m+2}{a'}\right)}e^{(kt-a+2a-(2m+2)a')i}. \tag{73}$$

Ogsaa dette Resultat vil kunne udledes ad elementær Vej. Man tænke sig et cylindrisk Bundt Centralstraaler med Diameteren 1 træde ind i Kuglen. Efter m indre Tilbagekastninger vil dette Bundt træde ud af Kuglen med Diameteren $\frac{(2m+2)a-a'}{a'}$ og dernæst forene sig til et virkeligt eller indbildt Brændpunkt. Er dettes Afstand fra Centret a_1, saa vil i Afstanden a Straalebundtets Diameter blive $\frac{a_1-a}{a_1-a}\cdot\frac{(2m+2)a-a'}{a'}$. Nu er Brændvidden a_1 bestemt ved $-\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a}-\frac{2m+2}{a'}=0$, og Svingningsamplituden, som efter de m Tilbagekastninger og to Brydninger er forandret til $\left(\frac{1-N}{1+N}\right)^m\frac{4N}{(1+N)^2}$, vil blive forøget i samme Forhold, som Straalebundtets Diameter er blevet mindre. Naar desuden Fasen bestemmes efter den tilbagelagte optiske Vejlængde, ses det, at Resultatet vil blive nøjagtig det samme, som ovenfor er fundet.

Derimod kan man ikke paa denne Maade bestemme Bevægelsen i selve Brændpunkterne. Disse ere bestemte ved Ligningen $G=0$, og hertil knytter sig den til $0<\frac{1}{a}\overline{\overline{<}}\frac{1}{a}$ svarende Betingelse $2N>2m+2\overline{\overline{>}}N$, hvoraf ses, at der til $N\overline{\overline{<}}1$ svarer intet virkeligt Brændpunkt, til $1<N<2$ kun et Brændpunkt, o. s. v. Til $G=0$ svarer Udtrykket (55), som med de ovenfor angivne Værdier af A, B, H og I giver Udslaget i det betragtede Brændpunkt bestemt ved

$$-\frac{2N(1-N)^m}{(1+N)^{m+2}}\left(\sqrt{\frac{6\pi}{a^2\left(-\frac{1}{a^3}+\frac{2}{a^3}-\frac{2m+2}{a'^3}\right)}}\,e^{\left(Fa-\frac{\pi}{4}\right)i}-\frac{18}{5}\frac{-\frac{1}{a^5}+\frac{2}{a^5}-\frac{2m+2}{a'^5}}{a\left(-\frac{1}{a^3}+\frac{2}{a^3}-\frac{2m+2}{a'^3}\right)^2}e^{Fai}\right). \tag{74}$$

Det fremgaar af Udtrykket for G, at naar vi langs Hovedaxen fra et ydre Punkt nærme os Kuglen og passere et Brændpunkt, saa vil G fra en positiv Værdi gjennem 0 gaa over til en negativ Værdi. Heraf ses, i Henhold til det i Slutningen af forrige Afsnit anførte, at Amplituden under denne Bevægelse hurtig voxer fra en meget lille Størrelse i Nærheden af Brændpunktet til den ovenfor for Brændpunktet bestemte Værdi af Størrelsesordenen $a^{\frac{1}{2}}$, voxer endnu yderligere for derefter gjennem Svingninger at naa til det dobbelte af Amplituden i Brændpunktet. Derefter træffes Axen af andre Straaler, som ligge uden for Centralstraalerne, og hvis Virkning vil blive bestemt i det følgende. En nærmere Bestemmelse af Lysbevægelsen i Nærheden af et Brændpunkt fremgaar af (56) og den derefter givne Oversigt over Værdien af Integralet Q (57).

Som Exempel vil jeg antage $m = 0$, Kuglens Radius lig 1^{cm}, Brydningsforholdet 1,5 og Bølgelængden af det indfaldende Lys lig $0{,}0005^{mm}$. Man vil da have

$$a = 40000\pi\,, \quad a' = 1{,}5\,a\,, \quad a = 1{,}5\,a\,, \quad N = 1{,}5.$$

Disse Talværdier indsatte i (74) give som Resultat

$$-\,467{,}23\,e^{\left(Fa - \frac{\pi}{4}\right)i} + 1{,}50\,e^{Fai}\,.$$

Heraf ses, at det andet Led kun faar en ringe Betydning, og at Intensiteten, som regnes proportional med Amplitudens Kvadrat, er meget betydelig i dette Brændpunkt, nemlig 217311 Gange større end Intensiteten af det indfaldende Lys. For en Kugle med samme Brydningsforhold og en dobbelt saa stor Radius vilde Intensiteten meget nær blive det dobbelte.

I en lille Afstand δ $\left(\text{maalt med } \frac{\lambda}{2\pi} \text{ som Længdeenhed}\right)$ inden for Brændpunktet vil man have $G = -\frac{a\delta}{2a^2}$, og har paa dette Punkt Intensiteten naaet sit første Maximum, vil man af den i Slutningen af forrige Afsnit angivne Værdi af G i dette Punkt finde $d = 1047$, svarende til $0{,}0833^{mm}$. I dette Punkt vil Intensiteten være steget til 1191200, idet den her er 5,4814 Gange større end i Brændpunktet.

Beregningen af den Del af Lysbevægelsen i Axen inden for Kuglen, som hidrører fra Centralstraalerne, kan udføres paa ganske lignende Maade, idet vi gaa ud fra den anden Ligning (70). Den Sum, som bliver at beregne, naar det almindelige Led af de i (69) for k_n' og s_n' givne Summer udtages, vil være

$$\sum_1^{n_1} \frac{n+\frac{1}{2}}{a'\sqrt{q_n(a')}} \left(\pm i \cos \lambda_n(a')\beta_{n,m} + \sin \lambda_n(a')\gamma_{n,m}\right) e^{\left(kt \mp \frac{n\pi}{2} + \lambda_n(a) - (2m+1)\lambda_n(a')\right)i}\,.$$

Naar man nu heri giver $\cos \lambda_n(a')$ og $\sin \lambda_n(a')$ exponentiel Form og dernæst udvikler alle Funktionerne λ_n efter Formlen (71), ville i Exponenterne Koefficienterne til $\frac{n\pi}{2}i$ blive

$$\mp 1 + 2m + 1 \quad \text{og} \quad \mp 1 + 2m - 1\,.$$

Kun naar disse Koefficienter ere 0 eller et Multiplum af 4, vil Summen ikke forsvinde, og dette vil kun være Tilfældet, naar de kunne henføres til Formen

$$\mp\left(1 - (-1)^m\right) + 2m\,.$$

I dette Tilfælde vil Summen kunne gives Form af Integralet (51), og ved Sammenligning med dette erholdes

$$A = \pm i \frac{a}{a'} \frac{2N(N-1)^m}{(N+1)^{m+1}}, \qquad B = 0,$$

$$Fa = kt \mp (-1)^m a' + a - (2m+1)a', \qquad G = \frac{a}{2}\left(\mp \frac{(-1)^m}{a'} + \frac{1}{a} - \frac{2m+1}{a'}\right),$$

$$H = \frac{a^3}{24}\left(\mp \frac{(-1)^m}{a'^3} + \frac{1}{a^3} - \frac{2m+1}{a'^3}\right), \qquad I = \frac{a^5}{80}\left(\mp \frac{(-1)^m}{a'^5} + \frac{1}{a^5} - \frac{2m+1}{a'^5}\right).$$

Er G ikke meget lille vil ifølge (52) Resultatet af Integrationen blive

$$\mp \frac{2N(N-1)^m}{(N+1)^{m+1}} \cdot \frac{1}{a'\left(\mp \frac{(-1)^m}{a'} + \frac{1}{a} - \frac{2m+1}{a'}\right)} e^{(kt \mp (-1)^m a' + a - (2m+1)a')i}. \tag{75}$$

Hvis man derimod har $G = 0$, erholdes ifølge (55)

$$\mp \frac{N(N-1)^m}{(N+1)^{m+1}} \left(\sqrt{\frac{6\pi}{a'^2\left(\mp \frac{(-1)^m}{a'^3} + \frac{1}{a^3} - \frac{2m+1}{a'^3}\right)}}\, e^{\left(Fa - \frac{\pi}{4}\right)i} - \frac{18}{5} \frac{\mp \frac{(-1)^m}{a'^5} + \frac{1}{a^5} - \frac{2m+1}{a'^5}}{a'\left(\mp \frac{(-1)^m}{a'^3} + \frac{1}{a^3} - \frac{2m+1}{a'^3}\right)^2} e^{Fai} \right). \tag{76}$$

Da man skal have $a' \overline{\overline{<}} a'$, vil man se, at Ligningen $G = 0$ ikke er mulig for $N - 1 < 2m + 1 < N + 1$, medens derimod for alle andre Værdier af m Ligningen vil kunne tilfredsstilles enten ved det ene eller ved det andet af de to i G indgaaende Fortegn.

Naar man i (75) betragter a' som uendelig lille og dernæst for m sætter $2m$ og $2m + 1$, vil Resultatet slutte sig umiddelbart til det i (62) fundne, hvor Udslaget i Nærheden af Centret er bestemt ad anden Vej.

Vi fortsætte nu Summationen af Rækkerne (70) fra $n = n_1$ til $n = n_2$, idet n_2 er den højeste Grænse for n, som er mulig, naar Funktionerne q_n og λ_n skulle kunne udtrykkes ved Formlerne (67) og (68). Rækkerne antage altsaa den i (35) givne Form, og idet vi ogsaa her sætte $n = \nu + z$, hvor ν og z betragtes som hele Tal, ville vi indføre følgende Betegnelser

$$\nu + \tfrac{1}{2} = a \sin\theta = a' \sin\theta' = a \sin\vartheta = a' \sin\vartheta', \tag{77}$$

hvor de fire Vinkler θ, θ', ϑ og ϑ' ere beliggende imellem 0 og $\frac{\pi}{2}$ og antages foreløbig ikke at falde meget nær ved disse to Grænser.

Af (67) følger

$$1 = \cos\theta\, q_\nu(a) = \cos\theta'\, q_\nu(a') = \cos\vartheta\, q_\nu(a) = \cos\vartheta'\, q_\nu(a'), \tag{78}$$

hvorefter Koefficienterne b_ν, $b_{\nu,m}$ o. s. v. blive bestemte ved

$$b_\nu = \frac{N\cos\theta - \cos\theta'}{N\cos\theta + \cos\theta'}, \qquad b_{\nu,m} = 2N\cos\theta\cos\theta' \frac{(N\cos\theta - \cos\theta')^m}{(N\cos\theta + \cos\theta')^{m+2}},$$

$$c_\nu = \frac{\cos\theta - N\cos\theta'}{\cos\theta + N\cos\theta'}, \qquad c_{\nu,m} = 2N\cos\theta\cos\theta' \frac{(\cos\theta - N\cos\theta')^m}{(\cos\theta + N\cos\theta')^{m+2}},$$

$$\beta_{\nu,m} = 2N\sqrt{\cos\theta\cos\theta'} \frac{(N\cos\theta - \cos\theta')^m}{(N\cos\theta + \cos\theta')^{m+1}}, \qquad \gamma_{\nu,m} = 2N\sqrt{\cos\theta\cos\theta'} \frac{(\cos\theta - N\cos\theta')^m}{(\cos\theta + N\cos\theta')^{m+1}}.$$

De tilsvarende Koefficienter b_n, $b_{n,m}$ o. s. v. ville kunne udvikles i Rækker efter Potenser af z, saaledes til Exempel

$$b_n = b_\nu + \left(\frac{1}{a\cos\theta}\frac{d b_\nu}{d\theta} + \frac{1}{a'\cos\theta'}\frac{d b_\nu}{d\theta'}\right) z + \ldots .$$

Ligeledes er ifølge (68)

$$\lambda_\nu(a) = a\cos\theta - \frac{\nu\pi}{2} + (\nu + \tfrac{1}{2})\theta ,$$

$$\lambda_n(a) = \lambda_\nu(a) + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) z + \frac{z^2}{2a\cos\theta} + \frac{\sin\theta\, z^3}{6a^2\cos^3\theta} + \frac{(1+2\sin^2\theta)\, z^4}{24\, a^3\cos^5\theta} + \ldots ,$$

ligesom tilsvarende Udviklinger erholdes for $\lambda_n(a')$, $\lambda_n(a)$, $\lambda_n(a')$.

Vi udtage nu ligesom tidligere de enkelte Led af Rækkerne (69) for k_n og s_n og begynde med Antagelsen

$$2k_n = -1 , \quad 2s_n = -1 .$$

Den i (70) for η angivne Sum, taget fra $n = n_1$ til $n = n_2$, vil under denne Forudsætning indeholde Potensexponenten

$$\left(kt \mp \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a)\right) i = \left(kt \mp \frac{\nu\pi}{2} - \lambda_\nu(a) + \left(\mp\frac{\pi}{2} - \vartheta + \frac{\pi}{2}\right) z + \ldots\right) i .$$

Da Koefficienten til z her ikke kan blive 0 eller meget lille, vil altsaa i dette Tilfælde Summen forsvinde.

Antages dernæst

$$2k_n = -b_n e^{2\lambda_n(a) i} , \quad 2s_n = -c_n e^{2\lambda_n(a) i} ,$$

vil Summen indeholde Exponenten

$$\left(kt \mp \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a) + 2\lambda_n(a)\right) i ,$$

hvori Koefficienten til zi vil blive $\mp\frac{\pi}{2} - \left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) + 2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$, hvilken Koefficient heller ikke kan blive 0 eller meget lille, da $2\theta - \vartheta$ maa være mindre end π og tillige større end 0, fordi man maa have $\theta \geqq \vartheta$. Ogsaa i dette Tilfælde maa altsaa Summen blive 0.

Sættes endelig

$$k_n = b_{n,m} e^{2(\lambda_n(a) - (m+1)\lambda_n(a'))i} , \quad s_n = c_{n,m} e^{2(\lambda_n(a) - (m+1)\lambda_n(a'))i} ,$$

vil Summen indeholde Exponenten

$$\left(kt \mp \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a) + 2\lambda_n(a) - (2m+2)\lambda_n(a')\right) i ,$$

hvori Koefficienten til zi vil blive

$$\frac{\pi}{2}(2m + 1 \mp 1) - \vartheta + 2\theta - (2m+2)\theta' = G .$$

Antages nu ligesom i (41) $G = 2p\pi$, vil Summen gaa over til et Integral af Formen (42), hvor Koefficienterne ville blive

$$A = i\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta}}(\pm\cos\vartheta\, b_{\nu,m} + c_{\nu,m}), \qquad B = a\frac{dA}{d\nu},$$

$$Fa = kt + (\nu + \tfrac{1}{2})\,G - \frac{\pi}{4}(2m + 1 \mp 1) - a\cos\vartheta + 2a\cos\theta - (2m+2)\,a'\cos\theta',$$

$$H = \frac{a}{2}\left(-\frac{1}{a\cos\vartheta} + \frac{2}{a\cos\theta} - \frac{2m+2}{a'\cos\theta'}\right) = \frac{1}{2\sin\theta}(-\operatorname{tg}\vartheta + \operatorname{tg}\theta - (2m+2)\operatorname{tg}\theta'),$$

$$I = \frac{1}{6\sin^2\theta}(-\operatorname{tg}^3\vartheta + 2\operatorname{tg}^3\theta - (2m+2)\operatorname{tg}^3\theta'),$$

$$K = \frac{I}{4\sin\theta} + \frac{1}{8\sin^3\theta}(-\operatorname{tg}^5\vartheta + 2\operatorname{tg}^5\theta - (2m+2)\operatorname{tg}^5\theta').$$

I Stedet for det i Fa indgaaende Led $(\nu + \frac{1}{2})\,G$ vil man ogsaa, da ν er et helt Tal, kunne sætte $p\pi$, naar Betingelsen $G = 2p\pi$ er tilfredsstillet.

Resultatet af Integrationen vil da være givet ved Formlen (43) og, hvis man har $H = 0$, ved (50), eller mere almindelig, naar $G - 2p\pi$ ikke er 0, men meget lille, ved (49).

Ved de samme Formler kunne ogsaa Resultaterne med Hensyn til et indre Punkt bestemmes, idet vi da have at gaa ud fra den anden Ligning (70), som fører til følgende Værdier for Koefficienterne

$$A = i\frac{\sin\vartheta'}{\sqrt{\cos\vartheta'}}(\pm\cos\vartheta'\beta_{\nu,m} - (\pm)\gamma_{\nu,m}), \qquad B = a\frac{dA}{d\nu},$$

$$G = \frac{\pi}{2}(2m - (\pm)\,1 \mp 1) + (\pm)\,\vartheta' + \theta - (2m+1)\,\theta',$$

$$Fa = kt + (\nu + \tfrac{1}{2})\,G - \frac{\pi}{4}(2m - (\pm)\,1 \mp 1) + (\pm)\,a'\cos\vartheta' + a\cos\theta - (2m+1)\,a'\cos\theta',$$

$$H = \frac{1}{2\sin\theta}\big((\pm)\operatorname{tg}\vartheta' + \operatorname{tg}\theta - (2m+1)\operatorname{tg}\theta'\big),$$

$$I = \frac{1}{6\sin^2\theta}\big((\pm)\operatorname{tg}^3\vartheta' + \operatorname{tg}^3\theta - (2m+1)\operatorname{tg}^3\theta'\big),$$

$$K = \frac{I}{4\sin\theta} + \frac{1}{8\sin^3\theta}\big((\pm)\operatorname{tg}^5\vartheta' + \operatorname{tg}^5\theta - (2m+1)\operatorname{tg}^5\theta'\big).$$

Det indklamrede Fortegn $(\pm)$ tages overalt ens enten som $+$ eller som $-$ og bestemmes nærmere ved den Betingelse, at $G - 2p\pi$ skal være 0 eller meget lille.

Tænke vi os den saaledes beregnede Lysbevægelse i Hovedaxen frembragt ved Brydning og indre Tilbagekastning af Lysstraaler, ville disse svare til alle de Lysstraaler, som træffe Kuglen i Afstanden $\nu + \frac{1}{2}$ fra Hovedaxen. Indfaldsvinklen vil svare til θ, Brydningsvinklen til θ', medens ϑ og ϑ' blive de spidse Vinkler, hvorunder Straalerne træffe Hovedaxen i Punktet a uden for Kuglen eller i Punktet a' inden for Kuglen. Efter m indre Tilbagekastninger vil en indfaldende Straale være omdrejet Vinklen

$$\Delta_m = m\pi + 2\theta - (2m + 2)\theta',$$

naar Straalen er traadt ud af Kuglen, og Vinklen

$$\Delta'_m = m\pi + \theta - (2m + 1)\theta',$$

naar Straalen ikke er traadt ud af Kuglen.

For et ydre Punkt vil altsaa Betingelsen $G = 2p\pi$ ogsaa, ifølge den ovenfor givne Værdi af G, kunne udtrykkes ved

$$\Delta_m = \vartheta + (2p - \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2})\pi,$$

hvilken Ligning udtrykker, at Straalerne ere omdrejede Vinkleu ϑ og enten et helt Antal Omdrejninger, naar øverste Fortegn læses og Skjæringen med x-Axen altsaa finder Sted paa dennes positive Side, eller et ulige Antal halve Omdrejninger, naar nederste Fortegn læses og Skjæringen foregaar paa x-Axens negative Side.

For et indre Punkt vil Betingelsen $G = 2p\pi$ svare til enten

$$\Delta'_m = -\vartheta' + (2p + \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2})\pi \quad \text{eller} \quad \Delta'_m = \vartheta' + (2p - \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2})\pi.$$

Det sidste Tilfælde svarer til det foregaaende, hvor Straalernes Skjæring med Hovedaxen laa uden for Kuglen, det første Tilfælde indtræder, naar Straalerne efter at være omdrejede et helt Antal Gange og den stumpe Vinkel $\pi - \vartheta'$ træffer Axens positive Side, eller ved at være omdrejet et ulige Antal halve Omgange og Vinklen $\pi - \vartheta'$ træffer Axens negative Side, noget som ikke vil kunne indtræde for Skjæringer med Axen uden for Kuglen.

Det ses saaledes, at overhovedet alle Tilfælde, hvorunder et Punkt i Axen kan træffes af nogen af de Straaler, som uden for Centralstraalerne ere faldne ind paa Kuglen og have lidt m Tilbagekastninger, ere indbefattede under Betingelsen $G = 2p\pi$.

Naar for et Punkt $G - 2p\pi$ ikke kan være 0, men er en meget lille Størrelse, saa træffes Punktet ikke direkte af de retliniede brudte, men kun af de interfererende, bøjede Straaler.

Det er ovenfor omtalt, at naar vi fra et ydre Punkt nærme os Kuglen langs Hovedaxen, saa ville vi kort efter at have passeret et af Centralstraalernes Brændpunkter træffe en Amplitude, som er dobbelt saa stor som Amplituden i Brændpunktet. Herfra kan nu Lysbevægelsen videre bestemmes ved de ovenfor for et ydre Punkt fundne Resultater. Antages i disse Vinklerne meget smaa, ville vi have

$$-\vartheta + 2\theta - (2m + 2)\theta' = 0, \quad \text{og} \quad 2m + 1 \mp 1 = \text{et Multiplum af } 4,$$

altsaa er m lige for øverste Fortegn, ulige for nederste.

Endvidere findes

$$A = i\vartheta 4 N \frac{(1-N)^m}{(1+N)^{m+2}}, \qquad Fa = kt - a + 2a - (2m+2)a',$$

og ved Udvikling i Række

$$H = \frac{1}{6\theta}(-\vartheta^3 + 2\theta^3 - (2m+2)\theta'^3).$$

Udslaget, bestemt ved (43), vil altsaa blive

$$A\sqrt{\frac{a\pi}{H}}\, e^{\left(Fa+\frac{\pi}{4}\right)i} = i\vartheta 4 N \frac{(1-N)^m}{(1+N)^{m+2}} \sqrt{\frac{6a\theta\pi}{-\vartheta^3 + 2\theta^3 - (2m+2)\theta'^3}}\, e^{\left(Fa+\frac{\pi}{4}\right)i}.$$

Bemærkes det nu, at naar, som antaget, Vinklerne ere meget smaa, vil man ifølge (77) have $a\theta = a'\theta' = a\vartheta$, hvorved det fundne Udtryk netop ogsaa bliver det dobbelte af Udslaget i Brændpunktet, saaledes som dette er bestemt i (74). Det andet, lidet betydende Led i denne sidste Formel er her ladet ude af Betragtning. Heraf ses, at de fundne Resultater ogsaa gjælde for saa smaa Vinkler, at de slutte sig umiddelbart til de tidligere for Centralstraalerne afledede Formler. Ganske det samme gjælder for de indre Punkters Vedkommende.

Naar θ eller θ' nærmer sig den øvre Grænse $\frac{\pi}{2}$, vil baade for et ydre og for et indre Punkt H nærme sig plus eller minus ∞, og det ved (43) bestemte Udslag vil altsaa konvergere til 0. Naar for et indre Punkt ϑ' nærmer sig $\frac{\pi}{2}$, vil A konvergere til $-(\pm)i\frac{\gamma_{\nu,m}}{2\sqrt{\cos\vartheta'}}$, H til $(\pm)\frac{1}{2\sin\theta\cos\vartheta'}$ og Fa til $C+(\pm)\frac{\pi}{4}$, idet

$$C = kt + p\pi - \frac{\pi}{4}(2m \mp 1) + a\cos\theta - (2m+1)a'\cos\theta'.$$

Formlen (43) vil altsaa blive

$$A\sqrt{\frac{a\pi}{H}}\, e^{\left(Fa+\frac{\pi}{4}\right)i} = -(\pm)i\frac{\gamma_{\nu,m}}{2\sqrt{\cos\vartheta'}}\sqrt{\frac{a\pi\,.\,2\sin\theta\cos\vartheta'}{(\pm)1}}\, e^{\left(C+\frac{\pi}{4}(1+(\pm)1)\right)i},$$

som, baade naar øverste og naar nederste Fortegn læses, bliver lig

$$\tfrac{1}{2}\gamma_{\nu,m}\sqrt{2\pi a\sin\theta}\, e^{Ci}.$$

Naar nu a' antages at være et Punkt, for hvilket ϑ' nøjagtig vil blive lig $\frac{\pi}{2}$, og naar til et meget nærliggende Punkt $a'+h$ svarer et af de to Fortegn $(\pm)$, saa vil til et andet Punkt $a'-h$ svare det modsatte Fortegn. Det ses imidlertid af det ovenfor fundne Resultat, at for begge disse to meget nærliggende Punkter bliver det beregnede Udslag det samme og uafhængig af deres Afstand fra Punktet a', hvoraf kan sluttes, at de fundne Formler ogsaa forblive gyldige i Tilfælde af, at ϑ' naar selve Grænsen $\frac{\pi}{2}$.

De i dette Afsnit fremstillede Resultater omfatte saaledes alle de Tilfælde, hvor Lysstraalerne efter at være tilbagekastede og brudte et vilkaarligt Antal Gange enten umiddelbart eller, i Nærheden af Brændpunkterne, ved Interferens træffe Hovedaxen. Foruden disse Tilfælde kan der ogsaa blive Spørgsmaal om Virkningen af de uden om Kuglen gaaende Straalers Bøjning, men disse Bøjningsfænomener optræde kun i Nærheden af Kuglens geometriske Skyggerand og ville i et følgende Afsnit blive gjort til Gjenstand for en nærmere Undersøgelse.

Som almindeligt Resultat af det her udviklede fremgaar, at den til Amplitudens Kvadrat svarende Lysintensitet fremtræder meget forskjellig i de forskjellige Punkter af Hovedaxen, snart som en Størrelse af samme Orden som Enheden, det vil sige, som Intensiteten af det indfaldende Lys, snart, nemlig i Centralstraalernes Brændpunkter og i de andre Straalers axiale Brændlinier, som en Størrelse af Ordenen α, og endelig ogsaa i nogle af Brændliniernes Endepunkter som en Størrelse af Ordenen $\alpha^{\frac{4}{3}}$. I disse sidste Brændpunkter vilde altsaa for en uendelig stor Kugle Intensiteten være større end i et hvilket som helst andet Punkt i Axen (saa vel som ogsaa uden for Axen), men i Virkeligheden bliver, naar vi holde os inden for de praktisk mulige Grænser, Intensiteten i disse Punkter altid betydelig mindre end i Centralstraalernes første, til $m = 0$ svarende, Brændpunkt. Tages som Exempel $N = 1{,}5$, vil der først fremkomme et saadant ydre Brændpunkt efter tre indre Tilbagekastninger. Sættes nu $m = 3$, vil man finde

$$\theta = 73°39'16{,}6'', \quad \theta' = 39°46'15{,}8'', \quad \vartheta = 9°8'26{,}8'',$$

svarende til $G = 2\pi$ og $H = 0$. Antages endvidere $\alpha = 40000\pi$, vil man af Formlen (50), hvori kun Leddet af højeste Orden medtages, finde Amplituden 24,681, Intensiteten 609,14, medens Intensiteten i det første Brændpunkt, som tidligere vist, er 217311, altsaa mangfoldige Gange større.

5. α meget stor. Bevægelsen uden for Hovedaxen.

For Kuglefunktionen $P_n(\cos\varphi)$ haves den bekjendte Udvikling

$$P_n(\cos\varphi) = 2\frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\left(\cos n\varphi + \frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{1}{2}\cos(n-2)\varphi + \frac{2n(2n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cos(n-4)\varphi + \ldots\right),$$

hvilken Række, naar n er ulige, ender med det Led, som indeholder $\cos\varphi$, og naar n er lige, med et konstant Led, hvoraf tages det halve.

Vi ville nu her forudsætte, at φ ikke er 0 eller meget lille, og at n er et meget stort Tal. Man vil da som bekjendt ved Summation af Rækken erholde det allerede af Laplace fundne Udtryk

$$P_n(\cos\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin\varphi}} \cos\left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right).$$

Heraf dannes endvidere, med Bortkastelse af Størrelser af lavere Orden,

$$\frac{d P_n(\cos\varphi)}{d\varphi} = -\sqrt{\frac{2n}{\pi \sin\varphi}} \sin\left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right).$$

Denne Værdi indsættes i Rækkerne (31). Da det betragtede Punkt antages at ligge uden for Hovedaxen, vil det ikke kunne træffes af Centralstraalerne, som svare til $n < n_1$, hvorfor Summationerne her kun behøve at udføres fra $n = n_1$ til $n = \infty$. Rækkerne ville saaledes kunne udtrykkes ved

$$\left.\begin{aligned}
K &= -\frac{\cos\psi}{a}\sum_{n_1}^{\infty}\sqrt{\frac{2q_n(a)}{\pi n \sin\varphi}} \sin\left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right) e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}-\lambda_n(a)\right)i}\, 2k_n\,, \\
S &= i\,\frac{\sin\psi}{a}\sum_{n_1}^{\infty}\sqrt{\frac{2q_n(a)}{\pi n \sin\varphi}} \sin\left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right) e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}-\lambda_n(a)\right)i}\, 2s_n\,, \\
K' &= i\,\frac{\cos\psi}{a'}\sum_{n_1}^{\infty}\sqrt{\frac{2q_n(a')}{\pi n \sin\varphi}} \sin\left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right) e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i} \sin\lambda_n(a')\, 2k_n'\,, \\
S' &= \frac{\sin\psi}{a'}\sum_{n_1}^{\infty}\sqrt{\frac{2q_n(a')}{\pi n \sin\varphi}} \sin\left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right) e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i} \sin\lambda_n(a')\, 2s_n'\,.
\end{aligned}\right\} \quad (79)$$

Vi indskrænke os i dette Afsnit til at udføre disse Summationer indtil $n = n_2$, det vil sige, indtil den højeste Grænse for n, inden for hvilken Funktionerne q_n og λ_n lade sig udtrykke ved de i (67) og (68) givne Formler.

Af Rækkerne for K og S udtages, med Anvendelsen af samme Fremgangsmaade som i det foregaaende Afsnit, den til

$$2k_n = -1\,, \quad 2s_n = -1$$

svarende Del. Leddene heri ville komme til at indeholde de to Exponenter

$$\left(kt - \frac{\pi n}{2} - \lambda_n(a) \pm \left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right) i\,.$$

Sættes heri $n = \nu + z$, blive ved Udviklingen efter Potenser af z Koefficienterne til zi

$$G = -\vartheta \pm \varphi\,,$$

hvor Vinklen ϑ ligger imellem 0 og $\frac{\pi}{2}$, Vinklen φ imellem 0 og π, uden at de naa disse Grænser. Betingelsen $G = 2p\pi$ vil derfor kun kunne tilfredsstilles for $p = 0$ og $\vartheta = \varphi$. Dette forudsat, kan Summen forandres til et Integral af Formen (42), hvorefter man for Rækken K ved Sammenligningen erholder

$$A = \frac{\cos\psi}{2ai}\sqrt{\frac{2}{\pi a \cos\vartheta \sin\vartheta \sin\varphi}} = -i\,\frac{\cos\psi}{a \sin\varphi \sqrt{2\pi a \cos\varphi}}\,,$$

$$Fa = kt - a\cos\varphi - \frac{\pi}{4}\,, \quad H = -\frac{a}{2a\cos\varphi}\,.$$

Det ved (43) bestemte Resultat af Integrationen bliver

$$-\frac{\cos\psi}{a\sin\varphi}\,e^{(kt-a\cos\varphi)i}.$$

Der er herved, paa Grund af Ligningen $\vartheta = \varphi$, forudsat, at man har $a\sin\varphi < \alpha$ og $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Er dette ikke Tilfældet, bliver Resultatet 0.

Tilsvarende for Rækken S findes

$$i\,\frac{\sin\psi}{a\sin\varphi}\,e^{(kt-a\cos\varphi)i}.$$

Ved Indsættelsen af disse to Udtryk for K og S i Ligningerne (17) erholdes, med Bortkastelse af de Led, som ere af lavere Orden end Enheden, den tilsvarende Del af Komposanterne $\overline{\xi}_e$, $\overline{\eta}_e$, $\overline{\zeta}_e$ bestemte ved

$$\overline{\zeta}_e = -\sin\varphi\cos\psi\,e^{(kt-a\cos\varphi)i}, \quad \overline{\eta}_e = -\cos\varphi\cos\psi\,e^{(kt-a\cos\varphi)i}, \quad \overline{\zeta}_e = \sin\psi\,e^{(kt-a\cos\varphi)i},$$

hvilke Værdier ses at være ligestore med de i Ligningerne (13) givne Udtryk for Komposanterne af det indfaldende Lys med modsat Fortegn. Dette Resultat udsiger saaledes kun, at naar de tilbagekastede og brudte Straaler holdes ude af Betragtning, og Kuglen altsaa betragtes som fuldkommen sort og uigjennemsigtig, saa vil der være fuldstændig Mørke bag ved den belyste Kugle uden for Hovedaxen indtil en vis Afstand fra denne. At det ogsaa er Tilfældet i Hovedaxen er vist i det foregaaende Afsnit.

Vi udtage dernæst det Led af de to første Ligninger (69), som svarer til

$$2k_n = -b_n e^{2\lambda_n(a)i}, \quad 2s_n = -c_n e^{2\lambda_n(a)i}.$$

Disse Værdier indsatte i Rækkerne K og S ville give Led med de to Exponenter

$$\left(kt - \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a) + 2\lambda_n(a) \pm \left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right)i,$$

hvor, ved Udviklingen efter Potenser af z, Koefficienten til zi bliver

$$G = -\pi - \vartheta + 2\theta \pm \varphi.$$

Da man maa have $\theta \geqq \vartheta$, svarende til $a \geqq \alpha$, kan Betingelsen $G = 2p\pi$ kun tilfredsstilles for $p = 0$ og naar øverste Fortegn læses. Altsaa er

$$G = -\pi - \vartheta + 2\theta + \varphi = 0.$$

For Summen K erholdes dernæst ved Sammenligning med Integralet (42) Koefficienterne

$$A = -i\frac{\cos\psi\,b_\nu}{a\sqrt{2\pi a\cos\vartheta\sin\theta\sin\varphi}}, \quad Fa = kt - a\cos\vartheta + 2a\cos\theta + \frac{\pi}{4},$$

$$H = \frac{-\operatorname{tg}\vartheta + 2\operatorname{tg}\theta}{2\sin\theta},$$

hvorefter den ved (43) bestemte Værdi af Integralet bliver

$$K = \frac{\cos\psi\, b_\nu}{a\sqrt{\cos\vartheta\sin\varphi}\,(-\operatorname{tg}\vartheta + 2\operatorname{tg}\theta)}\, e^{(kt - a\cos\vartheta + 2a\cos\theta)i}.$$

Tilsvarende findes

$$S = \frac{-i\sin\psi\, c_\nu}{a\sqrt{\cos\vartheta\sin\varphi}\,(-\operatorname{tg}\vartheta + 2\operatorname{tg}\theta)}\, e^{(kt - a\cos\vartheta + 2a\cos\vartheta)i}.$$

Idet disse Værdier skulle indsættes i Ligningerne (17) til Bestemmelsen af Svingningskomposanterne, kunne først følgende, mere almindelig gjældende, Bemærkninger gjøres. Naar Rækkerne (79) for K og S ere forandrede til Integraler, vil ved Differentioner med Hensyn til a og φ, naar alle Størrelser af lavere Orden bortkastes, kun Potensexponenterne komme i Betragtning. Disse ere betegnede ved Fai og man har

$$\frac{dFa}{d\nu} = G = 2p\pi.$$

Da ethvert Multiplum af $2\pi i$ kan tænkes udskudt af Exponenten, vil man, naar man i Stedet for ν vælger θ som uafhængig Variabel, altsaa have $\frac{dFa}{d\theta} = 0$, hvoraf atter følger, naar tillige a er variabel,

$$\frac{dFa}{da} = -\cos\vartheta.$$

Endvidere maa φ indgaa saaledes i Fa, at man faar

$$\frac{dFa}{d\varphi} = \pm(\nu + \tfrac{1}{2}) = \pm a\sin\vartheta,$$

Fortegnet svarende til det Fortegn, hvormed φ indgaar i Fa.

Man vil saaledes erholde almindelig

$$\bar{\xi}_e = \sin^2\vartheta aK, \quad \bar{\eta}_e = \pm\sin\vartheta\cos\vartheta aK, \quad \bar{\zeta}_e = \mp i\sin\vartheta aS. \tag{80}$$

Dette anvendt paa det ovenfor beregnede Tilfælde giver

$$\bar{\xi}_e\cos\vartheta - \bar{\eta}_e\sin\vartheta = 0,$$

$$\bar{\xi}_e\sin\vartheta + \bar{\eta}_e\cos\vartheta = \frac{\cos\psi\, b_\nu\sin\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta\sin\varphi}\,(-\operatorname{tg}\vartheta + 2\operatorname{tg}\theta)}\, e^{(kt - a\cos\vartheta + 2a\cos\theta)i},$$

$$\bar{\zeta}_e = -\frac{\sin\psi\, c_\nu\sin\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta\sin\varphi}\,(-\operatorname{tg}\vartheta + 2\operatorname{tg}\theta)}\, e^{(kt - a\cos\vartheta + 2a\cos\theta)i}.$$

Denne Del af Lysbevægelsen svarer til Bevægelsen i de fra Kuglens forreste Flade tilbagekastede Lysstraaler, og de samme Resultater kunne let udledes ad elementær Vej. Idet θ er Indfaldsvinklen, ϑ den spidse Vinkel, som den tilbagekastede Straale danner med Radiusvektor, vil Loven for Tilbagekastningen give $-\pi - \vartheta + 2\theta + \varphi = 0$. Den tilbagekastede Lysstraale har et indbildt Brændpunkt i Afstanden $\frac{a}{2}\cos\theta$ (Afstanden maalt med

$\frac{\lambda}{2\pi}$ som Længdeenhed) fra det reflekterende Fladeelement. Det betragtede Punkts Afstand fra dette Element er $a\cos\vartheta - \alpha\cos\theta$, og dets Afstand fra Brændpunktet $a\cos\vartheta - \frac{1}{2}\alpha\cos\theta$.

Ligger det betragtede Punkt i selve Kuglens Overflade, har man $\vartheta = \theta = \pi - \varphi$, og med det valgte Axesystem ere her Komposanterne af det indfaldende Lys

$$\overline{\xi_0} = \sin\varphi\cos\psi C\,, \quad \overline{\eta_0} = \cos\varphi\cos\psi C\,, \quad \overline{\zeta_0} = -\sin\psi C\,, \quad C = e^{(kt+\alpha\cos\theta)i}\,.$$

I Indfaldsplanen er altsaa Svingningsudslaget

$$\overline{\eta_0}\cos\theta - \overline{\xi_0}\sin\theta = -\cos\psi C\,,$$

som ifølge Fresnels Love ved Tilbagekastningen forandres til

$$\frac{\operatorname{tg}(\theta - \theta')}{\operatorname{tg}(\theta + \theta')}\cos\psi C = b_\nu\cos\psi C\,,$$

medens det paa Indfaldsplanen vinkelrette Svingningsudslag efter Tilbagekastningen bliver

$$\frac{\sin(\theta - \theta')}{\sin(\theta + \theta')}\sin\psi C = -c_\nu\sin\psi C\,.$$

I den tilbagekastede Lysstraale maa dernæst Intensiteten aftage i samme Forhold som Lyset udbreder sig over et større Fladeelement og Amplituden altsaa i Forhold til Kvadratroden af dette Fladeelement.

Dette Fladeelement er i det betragtede Punkt bestemt ved

$$\left(a\cos\vartheta - \frac{\alpha}{2}\cos\theta\right)2\,d\theta\,.\,a\sin\varphi\,d\psi\,,$$

som for $a = \alpha$, hvortil svarer $\vartheta = \theta = \pi - \varphi$, gaar over til

$$\alpha\cos\theta\,d\theta\,.\,\alpha\sin\theta\,d\psi\,.$$

Forholdet imellem disse to Elementer er

$$\frac{\alpha^2\sin\theta\cos\theta}{(2\,a\cos\vartheta - \alpha\cos\theta)\,a\sin\varphi} = \frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta\sin\varphi\,(-\operatorname{tg}\vartheta + 2\operatorname{tg}\theta)}\,,$$

idet α og a elimineres ved Ligningen $a\sin\vartheta = \alpha\sin\theta$.

Det vil ses, at man saaledes kommer nøjagtig til det samme Resultat, som ovenfor blev fundet.

Indsættes endelig det almindelige Led af de to første Rækker (69), nemlig

$$k_n = b_{n,m}\,e^{2(\lambda_n(\alpha) - (m+1)\lambda_n(\alpha'))i}\,, \qquad s_n = c_{n,m}\,e^{2(\lambda_n(\alpha) - (m+1)\lambda_n(\alpha'))i}\,,$$

i Rækkerne (79) for K og S, ville Leddene indeholde Exponenterne

$$\left(kt - \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a) + 2\,\lambda_n(\alpha) - (2m+2)\,\lambda_n(\alpha') \pm \left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right)i\,.$$

Ved Udviklingen heraf efter Potenser af z, vil Koefficienten til zi blive

$$G = m\pi - \vartheta + 2\,\theta - (2m+2)\,\theta' \pm \varphi\,.$$

Heri er $m\pi + 2\theta - (2m+2)\theta' = \Delta_m$ den Vinkel, som den indfaldende Straale er omdrejet efter m indre Tilbagekastninger (S. 31), saa at Ligningen ogsaa kan skrives $G = \Delta_m - \vartheta \pm \varphi$. Det ses heraf, at Betingelsen $G = 2p\pi$ er opfyldt, naar Indfaldsvinklen θ er valgt saaledes, at Straalen efter m indre Tilbagekastninger træffer det betragtede Punkt, og at øverste Fortegn maa læses, naar dette Punkt og den indfaldende Straale ligge paa samme Side af Hovedaxen, nederste Fortegn derimod, naar de ligge paa modsatte Sider af Hovedaxen.

For Summen K erholdes dernæst ved Sammenligning med Integralet (42) Koefficienten

$$A = \pm i \frac{2 \cos \psi\, b_{\nu,\, m}}{a\sqrt{2\pi a} \cos \vartheta \sin \theta \sin \varphi},$$

for Summen S Koefficienten

$$A = \pm \frac{2 \sin \psi\, c_{\nu,\, m}}{a\sqrt{2\pi a} \cos \vartheta \sin \theta \sin \varphi},$$

og for begge Summerne Koefficienterne

$$Fa = kt - a \cos \vartheta + 2a \cos \theta - (2m+2) a' \cos \theta' + (p - \tfrac{1}{2} m \mp \tfrac{1}{4}) \pi,$$

$$H = \frac{1}{2 \sin \theta} (- \operatorname{tg} \vartheta + 2 \operatorname{tg} \theta - (2m+2) \operatorname{tg} \theta'),$$

$$I = \frac{1}{6 \sin^2 \theta} (- \operatorname{tg}^3 \vartheta + 2 \operatorname{tg}^3 \theta - (2m+2) \operatorname{tg}^3 \theta').$$

Resultatet er givet i Formlen (43) og i Tilfælde af, at man har $H = 0$, ved Formlen (49). I det første Tilfælde vil Udslaget, hvis Komposanter ere bestemte ved Ligningerne (80), blive af samme Orden som Enheden, i det andet Tilfælde ($H = 0$), som repræsenterer alle Brændfladerne, vil Udslaget blive af Ordenen $a^{\frac{1}{6}}$, Intensiteten af Ordenen $a^{\frac{1}{3}}$. Da alle Størrelser, som ere af lavere Orden end Enheden overalt i denne Regning bortkastes, vil man altsaa her kun have at medtage det første Led af Formlen (49).

Hvorledes Lysbevægelsen i Nærheden af Brændfladerne er beskaffen fremgaar af de til Formlen (49) knyttede Beregninger og efterfølgende Diskussion. Det ses heraf, at naar H nærmer sig til 0, hvilket sker derved, at vi nærme os Brændfladen fra den Side, hvor de retliniede brudte og m Gange tilbagekastede Lysstraaler kunne naa hen ($G = 2p\pi$), saa vil Svingningsamplituden voxe gjennem en periodisk Bevægelse fra at være af Ordenen a^0 til Ordenen $a^{\frac{1}{6}}$. Det sidste og største Maximum naas, forinden vi naa til selve Brændfladen, hvorefter Amplituden aftager til den ved Formlen (50) bestemte Størrelse, svarende til selve Brændfladen ($H = 0$, $G = 2p\pi$). Derefter aftager Amplituden hurtig til 0. I Maximalpunktet nærmest Brændfladen er Amplituden 1,504, Intensiteten 2,262 Gange større end i Brændfladen.

Da Bestemmelsen af Lysintensiteten i og i Nærheden af Brændfladen har særlig Interesse, navnlig af Hensyn til Regnbuens Theori, skal jeg lægge Formlerne herfor nærmere tilrette for den numeriske Beregning.

Lysintensiteten af de m Gange fra Kuglens Inderflade tilbagekastede Straaler være i det ved φ, ψ, a bestemte Punkt betegnet ved $I_m(\varphi)$. Amplituden bestemmes ved Ligningerne (80), hvorefter Intensiteten, Amplitudens Kvadrat, findes udtrykt ved

$$I_m(\varphi) = a^2 \sin^2 \vartheta \text{ Ampl. } (K^2 + S^2).$$

Ifølge den almindelige Formel (49), hvoraf kun det første Led medtages, er

$$\text{Ampl. } K^2 = \frac{4\,a^{\frac{4}{3}}}{9\,I^{\frac{2}{3}}} Q^2 A^2, \quad \text{hvor } A^2 = \frac{2\cos^2\psi\, b^2_{\nu,m}}{a^2 \alpha \pi \cos\vartheta \sin\theta \sin\varphi},$$

$$\text{Ampl. } S^2 = \frac{4\,a^{\frac{4}{3}}}{9\,I^{\frac{2}{3}}} Q^2 A^2, \quad \text{hvor } A^2 = \frac{2\sin^2\psi\, c^2_{\nu,m}}{a^2 \alpha \pi \cos\vartheta \sin\theta \sin\varphi}.$$

Er det indfaldende Lys upolariseret, hvad vi i det følgende ville forudsætte, erholdes Intensiteten som den til alle Værdier af ψ fra 0 til 2π svarende Middelværdi. Der sættes derfor

$$\cos^2\psi\, b^2_{\nu,m} + \sin^2\psi\, c^2_{\nu,m} = \tfrac{1}{2}(b^2_{\nu,m} + c^2_{\nu,m}),$$

hvorefter vi med den ovenfor angivne Værdi af I erholde

$$I_m(\varphi) = \frac{4\,a^{\frac{1}{3}} Q^2 \sin^2\vartheta}{9\pi \sin\varphi \cos\vartheta \sin\theta} \left(\frac{6\sin^2\theta}{-\operatorname{tg}^3\vartheta + 2\operatorname{tg}^3\theta - (2m+2)\operatorname{tg}^3\theta'}\right)^{\frac{2}{3}} (b^2_{\nu,m} + c^2_{\nu,m}).$$

Indføres to nye Betegnelser p og p' ved

$$\operatorname{tg}\theta = p \operatorname{tg}\theta', \quad N^2 p' = p,$$

erholdes

$$b_{\nu,m} = 2N\cos\theta\cos\theta' \frac{(N\cos\theta - \cos\theta')^m}{(N\cos\theta + \cos\theta')^{m+2}} = 2p' \frac{(1-p')^m}{(1+p')^{m+2}},$$

$$c_{\nu,m} = 2N\cos\theta\cos\theta' \frac{(\cos\theta - N\cos\theta')^m}{(\cos\theta + N\cos\theta')^{m+2}} = 2p \frac{(1-p)^m}{(1+p)^{m+2}}.$$

Tillige ere Vinklerne θ, θ' og ϑ bestemte ved

$$\sin\theta = N\sin\theta' = \sqrt{\frac{p^2 - N^2}{p^2 - 1}}, \quad \operatorname{tg}\vartheta = 2(p - m - 1)\operatorname{tg}\theta',$$

ligesom man ogsaa har

$$a\sin\vartheta = \alpha\sin\theta, \quad \alpha\lambda = 2\pi R, \quad a\lambda = 2\pi r,$$

idet R er Kuglens Radius, r Punktets Afstand fra Centret, begge maalte ligesom λ med en vilkaarlig Længdeenhed, samt (se Side 17)

$$Q = 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}} W.$$

Ved disse Substitutioner kan Intensitetsformlen gives Formen

$$I_m(\varphi) = \frac{W^2}{\sin\varphi} C_m, \tag{a}$$

hvor C_m er uafhængig af φ og bestemt ved

$$C_m = \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{48p^2(N^2-1)}{\cos\vartheta\,(p^2-1)} \left(\frac{R\,(p^2-N^2)^{\frac{1}{2}}}{6\lambda(p^2-1)^{\frac{1}{2}}\,(p^3-4(p-m-1)^3-m-1)^2} \right)^{\frac{1}{3}} \left(p'^2 \frac{(1-p')^{2m}}{(1+p')^{2m+4}} + p^2 \frac{(1-p)^{2m}}{(1+p)^{2m+4}} \right), \tag{b}$$

$$\cos\vartheta = \frac{p\sqrt{N^2-1}}{\sqrt{p^2(N^2-1)+4(p-m-1)^2(p^2-N^2)}}.$$

Den i Formlen (a) indgaaende Størrelse W er bestemt ved

$$W = \int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}(\omega^3 - m'\omega)\,d\omega\,,$$

hvor m' er afhængig af φ paa følgende Maade. Man antage φ_0 at være den Værdi af φ, som svarer til Brændfladen og altsaa er bestemt ved

$$G = m\pi - \vartheta + 2\theta - (2m+2)\theta' \pm \varphi_0 = 2p_1\pi\,,$$

hvor p_1 er et helt Tal. Fortegnet for φ_0, som ligger imellem 0 og π, bliver bestemt ved selve Ligningen.

Sættes nu $\varphi = \varphi_0 \mp \delta$, erholdes $G - 2p_1\pi = -\delta$, men ifølge (46) er

$$G - 2p_1\pi = -\varepsilon\left(\frac{I}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \text{hvor } \varepsilon = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} m'.$$

Saaledes erholdes, naar tillige den givne Værdi af I indføres,

$$\delta = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} m' \left(\frac{-\operatorname{tg}^3\vartheta + 2\operatorname{tg}^3\theta - (2m+2)\operatorname{tg}^3\theta'}{6a^2\sin^2\theta}\right)^{\frac{1}{3}},$$

og med de ovenfor benyttede Substitutioner

$$\delta = m'\left(\frac{\lambda^2(p^2-1)(p^3-4(p-m-1)^3-m-1)(p^2-N^2)^{\frac{1}{2}}}{48R^2p^3(N^2-1)^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{c}$$

I Tilfælde af, at a kan betragtes som uendelig stor (Regnbuen), har man $\vartheta = 0$, $p = m+1$, hvorved Formlerne (b) og (c) reduceres til

$$C_m = \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{48p^2(N^2-1)}{p^2-1} \left(\frac{R(p^2-N^2)^{\frac{1}{2}}}{6\lambda p^2(p^2-1)^{\frac{5}{2}}}\right)^{\frac{1}{3}} \left(p'^2 \frac{(1-p')^{2m}}{(1+p')^{2m+4}} + p^2 \frac{(1-p)^{2m}}{(1+p)^{2m+4}}\right), \tag{b'}$$

$$\delta = m'\left(\frac{\lambda^2(p^2-1)^2(p^2-N^2)^{\frac{1}{2}}}{48R^2p^2(N^2-1)^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{c'}$$

Ligningen $W = 0$, som svarer til $I_m(\varphi) = 0$, giver, som omtalt Side 17, en Række Værdier af m', hvoraf den q-de for tilstrækkelig store Værdier af q er bestemt ved $m' = 3(q - \frac{1}{4})^{\frac{2}{3}}$. Hertil vil svare

$$\delta = \frac{1}{4}\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{(p^2-1)^2(p^2-N^2)^{\frac{1}{2}}}{p^2(N^2-1)^{\frac{3}{2}}}\right]^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\lambda}{R}(4q-1)\right)^{\frac{2}{3}},$$

under hvilken Form Resultatet, udledet ad elementær Vej, nylig er fremstillet af M. Boitel[1]),

---

[1]) Journ. de phys. S. II, t. 8, p. 282. 1889.

dog med den Forskjel, at paa Ligningens venstre Side træder hos Boitel $\operatorname{tg}\delta$ i Stedet for δ. Ved Beregningen af nogle Forsøg med en Glasstang har derimod Mascart[1]) benyttet Formlen $\delta = A(q - \frac{1}{4})^{\frac{2}{3}}$ og fundet selv for temmelig store Værdier af $\delta(9°)$ en god Overensstemmelse imellem Forsøg og Beregning.

Intensiteten i selve Brændfladen ($m' = 0$) er bestemt ved

$$I_m(\varphi_0) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})^2}{12}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{C_m}{\sin\varphi_0},$$

hvoraf atter den egentlige Maximalintensitet, som svarer til $m' = 1{,}0845$, med tilstrækkelig Tilnærmelse (idet den til denne Værdi af m' svarende Værdi af φ i Reglen bliver meget lidt forskjellig fra φ_0) kan findes ved Multiplikation med 2,262. Paa denne Maade har jeg beregnet Maximalintensiteten i et Par Exempler.

Man antage $R = 10^{\text{mm}}$, $N = 1{,}5$, $\lambda = 0{,}0005^{\text{mm}}$, $m = 1$. For et ydre Punkt umiddelbart ved Kuglens Overflade er $r = R$, $\vartheta = \theta$, $\operatorname{tg}\theta = 4\operatorname{tg}\theta'$, altsaa $p = 4$, $p' = \frac{16}{9}$. Idet C_m bestemmes ved Formlen (b), findes med disse Talværdier Maximalintensiteten lig 4,5423. Da denne Intensitet er proportional med $R^{\frac{1}{3}}$, ses heraf, at selv for meget, indtil næsten 100 Gange, mindre Kugler vil Intensiteten blive større end 1. I en Afstand af en halv Radius fra Kuglens Overflade er $r = 1{,}5R$, $\vartheta = \theta'$, $p = \frac{5}{2}$, $p' = \frac{10}{9}$, hvortil svarer Maximalintensiteten 0,9423.

Af disse Resultater fremgaar det, at der i saa godt som alle praktisk forefaldende Tilfælde af gjennemsigtige Kugler vil kunne findes Steder udenfor Kuglen, som blive belyste lige saa stærkt af det direkte indfaldende Lys, som fra den anden Side af det en Gang fra Kuglens indre Flade tilbagekastede Lys, hvor dette er stærkest. Da saadanne Steder vistnok let ville kunne opsøges experimentalt og ved de meddelte Formler ligeledes ville kunne bestemmes theoretisk, vil der herved være givet et godt Middel til at kontrollere Overensstemmelsen mellem Forsøg og Beregning.

Som et andet Exempel vil jeg vælge en kugleformig Vanddraabe med Brydningsforholdet $\frac{4}{3}$. For $m = 1$ og a uendelig stor findes her

$$\text{Maximalintensiteten} = 0{,}06728\frac{R^2}{r^2}\left(\frac{R}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Tages til Sammenligning en anden ligesaa stor Kugle med fuldstændig Tilbagekastning, vil i samme Afstand Intensiteten af det fra den forreste Flade tilbagekastede Lys være $\frac{R^2}{4r^2}$. Disse to Intensiteter ville altsaa være lige store, naar man har $R = 51{,}30\lambda$, som for $\lambda = 0{,}000585^{\text{mm}}$ giver $R = 0{,}03^{\text{mm}}$. Ved en Regndraabe med en 8 Gange saa

[1]) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 106, p. 1575. 1888.

stor Radius vilde Maximalintensiteten af det fra den indre Flade en Gang tilbagekastede Lys være dobbelt saa stor som den Intensitet, man vilde erholde, naar der i Stedet for Regndraaben sattes en ligesaa stor totalreflekterende Kugle.

I Stedet for en enkelt Kugle ville vi nu tænke os en Samling af lige store adskilte Kugler, alle lige stærkt belyste af de parallele indfaldende, upolariserede Lysstraaler, hvis Intensitet vi sætte lig 1. Kuglerne antages at ligge saa tæt eller i et Lag af saa stor Udstrækning, at Synslinierne fra den fjernt stillede Iagttager overalt træffer en af Kuglerne. Den hele Mængde af Kugler, der ligger inden for en Kegle, hvis Spids er i Iagttagerens Øje og som omfatter Enheden af Rumvinkel, vil da udsende Lys, hvis Intensitet i Keglens Spids er $\frac{r^2}{R^2\pi}$ Gange større end den Intensitet, som skyldes den enkelte Kugle. Idet vi kalde Intensiteten af det Lys, som indenfor Enhed af Rumvinkel træffer Iagttagerens Øje, den tilsyneladende Klarhed, ville vi altsaa for en saadan Samling kugleformige Regndraaber med Brydningsforholdet $\frac{4}{3}$ have

$$\text{Max. af tilsyneladende Klarhed} = 0{,}06728 \frac{1}{\pi}\left(\frac{R}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

For en lignende Samling af totalreflekterende Kugler vilde man, uafhængig af Kuglernes Størrelse, erholde den tilsyneladende Klarhed $\frac{1}{4\pi}$. Ved Sammenligningen maa det imidlertid her bemærkes, at alt det Lys, som ved en enkelt Tilbagekastning gaar ind imod Systemet, ved nye Tilbagekastninger føres tilbage igjen, hvorfor den tilsyneladende Klarhed her rettest bør fordobles eller sættes lig $\frac{1}{2\pi}$. Dette forudsat, ville de to Systemer ved enkeltfarvet Lys eller betragtede gjennem et ensfarvet Glas ses med den samme tilsyneladende Klarhed, naar Regndraabernes Radius er 8 Gange saa stor, som ovenfor beregnet, altsaa naar den er $0{,}24^{\mathrm{mm}}$.

Lysfænomenerne ved den her betragtede Samling af Regndraaber svare til de fuldt udviklede Regnbuer. Beregningen af disses og de surnumerære Regnbuers tilsyneladende Klarhed vil nu for de enkelte Spektralfarver kunne udføres ved de meddelte Formler (a), (b′), (c′) i Forbindelse med en Tavle over Integralet W. Her skal sluttelig kun som et Exempel, der tillader en Kontrol ved Iagttagelserne, anføres, at den anden, efter to indre Tilbagekastninger fremkomne, Regnbue efter Beregning har en 7,864 Gange mindre tilsyneladende Klarhed end den første Regnbue, selvfølgelig forudsat, at de ere dannede under samme Betingelser.

Lysbevægelsen i en Kugles Indre bliver at bestemme ved Hjælp af Rækkerne for K' og S' (79), idet heri sættes

$$k'_n = \beta_{n,m} e^{(\lambda_n(\alpha) - (2m+1)\lambda_n(\alpha'))i}, \quad s'_n = \gamma_{n,m} e^{(\lambda_n(\alpha) - (2m+1)\lambda_n(\alpha'))i}.$$

Der vil i Leddene fremkomme de fire Exponenter

$$\left(kt - \frac{n\pi}{2} + (\pm)\,\lambda_n(a') + \lambda_n(a) - (2m+1)\,\lambda_n(a') \pm \left((n+\tfrac{1}{2})\,\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right) i\,,$$

som ved Udviklingen efter Potenser give som Koefficient til zi

$$G = (2m-1)\frac{\pi}{2} + (\pm)\left(\vartheta' - \frac{\pi}{2}\right) + \theta - (2m+1)\,\theta' \pm \varphi\,.$$

Heri er $m\pi + \theta - (2m+1)\,\theta' = \varDelta'_m$ den Vinkel, som den indfaldende Straale er omdrejet efter m indre Tilbagekastninger. Betingelsen $G = 2p\pi$ giver den nærmere Bestemmelse af de to dobbelte Fortegn, og det vil ses, at ligesom for et ydre Punkt svarer øverste Fortegn for φ til det Tilfælde, at det betragtede Punkt og den indfaldende Straale ligge paa samme Side af Hovedaxen, samt at ϑ' og φ have samme Fortegn, naar den Straale, som træffer det betragtede Punkt, skjærer Hovedaxens positive Side, men modsat Fortegn, naar Skjæringen falder paa Hovedaxens negative Side.

Ved Sammenligningen med Integralet (42) erholdes dernæst for Rækkerne K' og S' henholdsvis Koefficienterne

$$A = \mp(\pm)\frac{i\cos\psi}{a'\sqrt{2\pi a}\,\cos\vartheta'\sin\theta\sin\varphi} \quad \text{og} \quad A = \mp(\pm)\frac{\sin\psi}{a'\sqrt{2\pi a}\,\cos\vartheta'\sin\theta\sin\varphi}\,,$$

samt for begge Rækker

$$Fa = kt + (\pm)\left(a'\cos\vartheta' + \frac{\pi}{4}\right) + a\cos\theta - (2m+1)\,a'\cos\theta' + \left(p - \frac{1}{2}m + \frac{1}{4} \mp \frac{1}{4}\right)\pi\,,$$

$$H = \frac{1}{2\sin\theta}\big((\pm)\operatorname{tg}\vartheta' + \operatorname{tg}\theta - (2m+1)\operatorname{tg}\theta'\big)\,,$$

$$I = \frac{1}{6\sin^2\theta}\big((\pm)\operatorname{tg}^3\vartheta' + \operatorname{tg}^3\theta - (2m+1)\operatorname{tg}^3\theta'\big)\,.$$

Til Bestemmelse af Svingningskomposanterne $\overline{\xi}'$, $\overline{\eta}'$, $\overline{\zeta}'$ tjene de med (80) analoge Ligninger

$$\overline{\xi}' = \sin^2\vartheta'\,a'K'\,, \quad \overline{\eta}' = \mp(\pm)\sin\vartheta'\cos\vartheta'\,a'K'\,, \quad \overline{\zeta}' = \mp i\,a'\sin\vartheta'\,S'\,. \qquad (81)$$

Lysbevægelsen er saaledes bestemt overalt, for saa vidt det er tilstrækkeligt at udføre Summationerne med Hensyn til n uden at overskride Grænsen $n = n_2$, hvorved er forudsat, at Formlerne (67) og (68) for q_n og λ_n, der atter bestemme Funktionerne v_n og w_n, ere brugbare. Naar denne Grænse for n maa overskrides, bliver det nødvendigt at søge andre Udviklinger for disse Funktioner, hvad jeg i det følgende Afsnit skal gaa over til.

Endnu skal kun bemærkes, at naar ϑ' naaer Grænsen $\frac{\pi}{2}$ i isolerede indre Punkter, saa lader Bevægelsen sig ogsaa her beregne ved de givne Formler, hvorfor Beviset kan føres paa samme Maade som i det tilsvarende tidligere (Side 32) behandlede Tilfælde, da Punktet var beliggende i Hovedaxen.

6. Fortsættelse. Fuldstændig Tilbagekastning, Bøjning.

Funktionerne v_n og w_n kunne ogsaa bestemmes paa en anden Maade end den, som tidligere (Side 22) har været benyttet, ved en iøvrigt ganske tilsvarende Udvikling. Man har identisk

$$v_n = \sqrt{v_n w_n}\, e^{\frac{1}{2}\log\frac{v_n}{w_n}}, \quad w_n = \sqrt{v_n w_n}\, e^{-\frac{1}{2}\log\frac{v_n}{w_n}}.$$

Sættes

$$v_n w_n = r_n, \quad \frac{1}{2}\log\frac{v_n}{w_n} = \mu_n,$$

vil man altsaa have

$$v_n = \sqrt{r_n}\, e^{\mu_n}, \quad w_n = \sqrt{r_n}\, e^{-\mu_n}. \tag{82}$$

Med Benyttelse af Ligningen $w_n v_n' - w_n v_n = 1$ vil man endvidere, naar den Variable betegnes ved a, erholde

$$\frac{d\mu_n}{da} = \frac{1}{2r_n}, \tag{83}$$

hvoraf ved Integration og med Indførelse af den til $a = 0$ svarende Værdi af μ_n

$$\mu_n = \frac{1}{2}\log\frac{a^{2n+1}}{1^2.3^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)} + \int_0^a da\left(\frac{1}{2r_n} - \frac{2n+1}{2a}\right). \tag{84}$$

Endvidere give Rækkerne (22) og (24) for v_n og w_n ved Multiplikation

$$2r_n = \frac{2a}{2n+1} + \frac{(2a)^3}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\cdot\frac{1}{2} + \frac{(2a)^5}{(2n-3)(2n-1)\ldots(2n+5)}\cdot\frac{1.3}{2.4} + \ldots. \tag{85}$$

Rigtigheden af den her antydede Lov for Rækken kunde ogsaa vises ved Dannelsen af Differentialligningen for r_n. Man kunde, idet u_n antages at tilfredsstille Differentialligningen (21), mere almindelig sætte

$$u_n = \sqrt{p_n}\, e^{c\int\frac{da}{p_n}}, \tag{86}$$

som indsat i (21) fører til Ligningen

$$p_n\frac{d^2p_n}{da^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{dp_n}{da}\right)^2 + \left(1 - \frac{n(n+1)}{a^2}\right)2p_n^2 + 2c^2 = 0, \tag{87}$$

hvoraf atter ved Differentiation fremgaar den lineære Ligning

$$\frac{d^3p_n}{da^3} + 4\left(1 - \frac{n(n+1)}{a^2}\right)\frac{dp_n}{da} + \frac{4n(n+1)}{a^3}p_n = 0. \tag{88}$$

Ligningen (86) svarer til Ligningerne (82) for $p_n = r_n$ og $c = \pm\frac{1}{2}$, ligesom den svarer til Ligningerne (63) for $p_n = q_n$ og $c = \pm i$. Altsaa maa den sidste Ligning (88) tilfredsstilles saavel for $p_n = q_n$ som for $p_n = r_n$, og det vil da ikke være vanskeligt ved Hjælp af denne Ligning at kontrollere Rigtigheden af Lovene i de for q_n og r_n angivne Rækker.

Saavel n som a betragtes som store Tal, begge af Størrelsesordenen a. Naar vi endvidere ligesom tidligere ved Summationen af Rækken for q_n lade alle Størrelser af lavere Orden end Enheden ude af Betragtning, saa vil under visse Betingelser Rækken (85) kunne summeres ved

$$2r_n = \frac{a}{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2 - a^2}}. \tag{89}$$

Betingelsen maa bestaa i, at a ikke overskrider en vis Grænse, men ved nærmere Betragtning af Rækken vil man snart blive opmærksom paa, at Bestemmelsen af denne Grænse frembyder visse Vanskeligheder. Rækkernes Led ville nemlig for $a < n$ først aftage, naa et Minimum og derefter voxe, faa vexlende Fortegn og naa et Maximum for sluttelig at aftage til 0. Saaledes har det Led, som gaar forud for det første negative Led, allerede naaet Størrelsen

$$\frac{(2a)^{2n+1}}{1.3\ldots 4n+1} \cdot \frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n},$$

som for $ea > 2n+1$, f. Ex. $a = 0{,}75n$, med voxende n voxer i det uendelige.

Det vil derfor være nødvendigt at bringe Rækken for r_n under en anden Form. Ved Hjælp af Ligningen

$$\frac{1.2.3\ldots 2m}{(2n-2m+1)(2n-2m+3)\ldots(2n+2m+1)} = (-1)^m \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin(2n+1)x \sin^{2m} x,$$

kan Rækken (85) gives Formen

$$2r_n = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin(2n+1)x \left(1 - \frac{a^2}{1^2}\sin^2 x + \frac{a^4}{1^2.2^2}\sin^4 x - \ldots\right),$$

og med Benyttelse af den Besselske Funktion J_0

$$2r_n = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin(2n+1)x\, J_0(2a\sin x). \tag{90}$$

Vi udføre denne Integration først fra $x = 0$ til $x = h$, idet h antages saa lille, at man uden kjendelig Fejl kan sætte x for $\sin x$, saalænge x er mindre end h. Denne Del af Integralet vil saaledes ved Indførelsen af en ny Variabel $y = (2n+1)x$ blive

$$\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{(2n+1)h} dy \sin y\, J_0\left(\frac{ay}{n+\frac{1}{2}}\right) = \frac{a}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{(2n+1)h} dy \sin y \left(1 - \left(\frac{ay}{n+\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^2} + \left(\frac{ay}{n+\frac{1}{2}}\right)^4 \frac{1}{2^2.4^2} - \ldots\right). \tag{91}$$

Dette Integrals øvre Grænse vil kunne betragtes ganske som den Art af ubestemte, vilkaarlige Størrelser, vi have betegnet ved Fællesmærket ω, og Integrationen vil derfor kunne udføres ved Formlen (39). Resultatet bliver Rækken

$$\frac{a}{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\right)^3 \frac{1}{2} + \left(\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\right)^5 \frac{1.3}{2.4} + \ldots = \frac{a}{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2 - a^2}},$$

hvor Konvergensbetingelsen alene er $a < n + \frac{1}{2}$.

I den anden Del af Integralet (90) kan den Besselske Funktion udvikles efter aftagende Potenser af a i den bekjendte semikonvergente Række

$$J_0(2a\sin x) = \frac{1}{\sqrt{\pi a \sin x}} \cos\left(2a\sin x - \frac{\pi}{4}\right) + \ldots,$$

hvor Leddenes Størrelsesorden er $\alpha^{-\frac{1}{2}}$, $\alpha^{-\frac{3}{2}}$, ...

Denne Del af Integralet vil saaledes med Udeladelse af de følgende Led af Rækken for J_0 blive

$$\frac{a}{n+\frac{1}{2}} \int_{(2n+1)h}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} dy \frac{\sin y \cos\left(2a\sin\frac{y}{2n+1} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi a \sin\frac{y}{2n+1}}} =$$

$$\sqrt{\frac{a}{(2n+1)\pi}} \int_{(2n+1)h}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} dy \frac{\sin\left(\left(1+\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\right)y - \frac{ay^3}{24(n+\frac{1}{2})^3} + \ldots - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\left(1-\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\right)y + \frac{ay^3}{24(n+\frac{1}{2})^3} - \ldots + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{y - \frac{y^3}{24(n+\frac{1}{2})^2} + \ldots}}. \quad (92)$$

Det ses heraf, at saalænge Differensen $n + \frac{1}{2} - a$ er af Ordenen α, saa vil denne Del af Integralet blive af lavere Orden end Enheden, og da Ligningen (89) forudsætter, at disse Størrelser lades ude af Betragtning, saa vil altsaa denne sidste Ligning forblive gyldig, naar blot Differensen $n + \frac{1}{2} - a$ er positiv og af Størrelsesordenen α. Denne Betingelse svarer saaledes, med Ombytning af a og $n + \frac{1}{2}$, ganske til den for q_n Ligning (67) gjældende.

Sættes i Ligning (84), idet n forudsættes meget stor,

$$1^2 . 3^2 \ldots (2n-1)^2 (2n+1) = 2(2n+1)^{2n+1} e^{-(2n+1)},$$

erholdes nu ved Hjælp af (89)

$$\mu_n = -\tfrac{1}{2}\log 2 + (n+\tfrac{1}{2}) \log \frac{n+\frac{1}{2} - \sqrt{(n+\frac{1}{2})^2 - a^2}}{a} + \sqrt{(n+\tfrac{1}{2})^2 - a^2}. \quad (93)$$

Vi ere saaledes i Stand til at bestemme Funktionerne v_n og w_n saavel for $n + \frac{1}{2} > a$ som for $n + \frac{1}{2} < a$, i første Tilfælde ved Hjælp af r_n og μ_n, i andet ved q_n og λ_n. Men der bliver endnu et Gebet tilbage, hvor disse Funktioner ikke ere bestemte ved de fundne Formler, nemlig naar Differensen $n + \frac{1}{2} - a$, hvad enten den er positiv eller negativ, er af en lavere Størrelsesorden end α.

Medens vi hidtil have søgt at summere alle forekommende Rækker med en saadan Nøjagtighed, at kun de Størrelser, som ere af en lavere Orden end Enheden, ere bortkastede, ville vi nu i det følgende indskrænke Nøjagtigheden saavidt, at kun Leddene af højeste Orden medtages. Dette forudsat, vil man, naar $n + \frac{1}{2} - a$ er af en lavere Størrelsesorden end α, ved Bestemmelsen af r_n kunne bortkaste alle Størrelser, som kun ere af samme Orden som Enheden, da r_n selv vil vise sig at være en Størrelse af højere Orden. Naar vi altsaa betragte den valgte Grænse $(2n+1)h$ som en Størrelse af Ordenen α^0, saa vil hele Integralet (91) kunne bortkastes, idet de to i Integralet indgaaende Funktioner sin og J_0 ikke for nogen Værdi af den Variable kunne blive numerisk større end 1. Endvidere vil den anden Del af Integralet, bestemt ved (92), reduceres til

$$\sqrt{\frac{a}{(2n+1)\pi}}\int_{(2n+1)h}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} dy\, \frac{\sin\left(\left(1-\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\right)y+\frac{ay^3}{24\,(n+\frac{1}{2})^3}-\ldots+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{y-\frac{y^3}{24(n+\frac{1}{2})^2}+\ldots}}\,, \qquad (94)$$

hvor atter den lavere Grænse kan forandres til 0, da heller ikke her Integrationen fra 0 til $(2n+1)h$ kan føre til et Resultat af højere Orden end Enheden, medens den øvre Grænse for x efter Substitutionen $ay^3 = 24(n+\frac{1}{2})^3 x$ ligesom før kan betegnes ved ω. Man erholder saaledes, naar alle Led, der kun føre til Resultater af lavere Orden, bortkastes,

$$2\,r_n(a) = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{6}}\sqrt{\pi}}\int_0^{\omega} dx\,x^{-\frac{5}{6}}\sin\left((n+\tfrac{1}{2}-a)\left(\frac{24}{a}\right)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x+\frac{\pi}{4}\right). \qquad (95)$$

Ved Udvikling efter Potenser af $n+\frac{1}{2}-a$ og Integration ved Hjælp af Ligningen (39) vil man heraf erholde

$$2r_n(a) = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{6}}\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\sin\frac{\pi}{3}+\Gamma\left(\frac{3}{6}\right)\sin\frac{3\pi}{3}\cdot(n+\tfrac{1}{2}-a)\left(\frac{24}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{1}+\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\sin\frac{5\pi}{3}\cdot(n+\tfrac{1}{2}-a)^2\left(\frac{24}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{1.2}+\ldots\right]. \qquad (96)$$

I denne Række bliver 2det, 5te, 8de, ... Led lig 0.

Sættes for Exempel $a = n+\frac{1}{2}$, erholdes

$$2\,r_n(n+\tfrac{1}{2}) = c(n+\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{3}}, \quad c = \frac{\Gamma(\frac{1}{6})}{3^{\frac{5}{6}}\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}08874\,, \quad \mathrm{Log}\,c = 0{,}0369226\,. \qquad (97)$$

Ved at indsætte Rækkerne (23) og (25) for v_n og w_n i $r_n = v_n w_n$ har jeg beregnet nedenstaaende Tavle, som viser en overraskende god Overensstemmelse mellem de virkelige og de ved Formlerne (97) beregnede Værdier af $r_n(n+\frac{1}{2})$ allerede ved de laveste Værdier af n.

$n =$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,
$2r_n(n+\frac{1}{2}) =$	0,8415,	1,2416,	1,4756,	1,6518,	1,7967,	1,9212,	2,0314,
$c(n+\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} =$	0,8641,	1,2463,	1,4776,	1,6530,	1,7975,	1,9218,	2,0319.

Det vil bemærkes, at naar $n+\frac{1}{2}-a$ er af højere Orden end $a^{\frac{1}{3}}$, vil Leddenes Størrelsesorden være voxende. Men med denne Forudsætning vil ogsaa Integralet (94) ved Substitutionen $\left(1-\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\right)y = x$ reduceres til

$$2r_n = \sqrt{\frac{a}{(2n+1-2a)\pi}}\int_0^{\omega}\frac{dx}{\sqrt{x}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2a\,(n+\frac{1}{2}-a)}}\,, \qquad (98)$$

som viser, at vi nu atter kunne gaa over til den simplere Formel (89) for $2r_n$, idet denne fører til det samme Resultat, naar alene Størrelserne af højeste Orden tages i Betragtning. Med denne Indskrænkning i Nøjagtigheden vedbliver altsaa Formlen (89) at være gjældende saalænge Differensen $n+\frac{1}{2}-a$ er af en højere Orden end $a^{\frac{1}{3}}$. Naar Differensen $n+\frac{1}{2}-a$ ikke er af lavere Orden end a, saa er $r_n(a)$ aldrig af højere Orden end Enheden. Er nemlig denne Differens positiv, fremgaar dette af Ligningen (89), er Differensen negativ ses det samme ved i Ligningen $r_n = v_n w_n$ at udtrykke v_n og w_n ved Ligningerne (23) og (25). Hvis derimod Differensen $n+\frac{1}{2}-a$ bliver af lavere Orden end a, saa kan $r_n(a)$ blive af en højere Orden end Enheden, og denne Funktion vil ved Variation af n sluttelig ifølge (96) naa sin højeste Værdi for $n+\frac{1}{2} = a$.

I Rækken (66) for q_n vil det almindelige Led, naar $n+\frac{1}{2}-a$ er af lavere Orden end a, kunne bestemmes ved

$$\frac{(n-m+1)(n-m+2)\dots(n+m)}{a^{2m}}\cdot\frac{1.3\dots2m-1}{2.4\dots2m} = \frac{e^{-2m}(n+\frac{1}{2}+m)^{n+\frac{1}{2}+m}}{\sqrt{\pi m}\,a^{2m}(n+\frac{1}{2}-m)^{n+\frac{1}{2}-m}}.$$

Ved Forandring af Summation til Integration vil man erholde

$$q_n(a) = \int_0^n \frac{dm}{\sqrt{\pi m}} e^{F(m)}, \quad F(m) = -2m + m\log\frac{(n+\frac{1}{2})^2 - m^2}{a^2} + (n+\frac{1}{2})\log\frac{n+\frac{1}{2}+m}{n+\frac{1}{2}-m},$$

eller ved Udvikling efter Potenser af m

$$F(m) = -2m\log\frac{a}{n+\frac{1}{2}} - 2\left(\frac{m^3}{(n+\frac{1}{2})^2}\cdot\frac{1}{2.3} + \frac{m^5}{(n+\frac{1}{2})^4}\cdot\frac{1}{4.5} + \dots\right).$$

Sættes dernæst $m^3 = 3(n+\frac{1}{2})^2 x$ vil, med den her udkrævede Nøjagtighed, Integralet kunne reduceres til

$$q_n(a) = \frac{(n+\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{6}}\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dx\, x^{-\frac{5}{6}} e^{-(24)^{\frac{1}{3}}(n+\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}\log\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}} - x}.$$

Heri vil ligeledes med tilstrækkelig Nøjagtighed kunne sættes $\log\frac{a}{n+\frac{1}{2}} = \frac{a-n-\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}$, hvorefter Integrationen fører til Resultatet

$$q_n(a) = \frac{(n+\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{6}}\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) + \Gamma\left(\frac{3}{6}\right)(n+\tfrac{1}{2}-a)\left(\frac{24}{n+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{1} + \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)(n+\tfrac{1}{2}-a)^2\left(\frac{24}{n+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{1.2} + \dots\right]. \quad (99)$$

Indsættes heri $a = n+\frac{1}{2}$, faas med samme Betydning af c som ovenfor

$$q_n(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{2}{\sqrt{3}}c(n+\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{3}}, \quad \mathrm{Log}\frac{2}{\sqrt{3}}c = 0{,}0993920. \quad (100)$$

Ogsaa her finder en god Overensstemmelse Sted med de umiddelbart af Rækken (66) beregnede exakte Værdier af $q_n(n+\frac{1}{2})$ allerede ved de laveste Værdier af n, hvad følgende Tavle udviser.

$n =$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,
$q_n(n+\frac{1}{2}) =$	1,0000 ,	1,4444 ,	1,7104 ,	1,9121 ,	2,0783 ,	2,2215 ,	2,3482 ,
$\frac{2c}{\sqrt{3}}(n+\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} =$	0,9978 ,	1,4391 ,	1,7062 ,	1,9087 ,	2,0755 ,	2,2191 ,	2,3462.

Analog med r_n vil q_n kunne udtrykkes med den begrænsede Nøjagtighed ved Ligning (67), saalænge Differensen $a-(n+\frac{1}{2})$ er af højere Orden end $a^{\frac{1}{3}}$, men modsat r_n har q_n en med voxende n stadig voxende Værdi.

Af de saaledes fundne Værdier for r_n og q_n kunne saavel λ_n og μ_n som v_n og w_n beregnes. Af Ligningerne $2r_n = 2v_n w_n = q_n \sin 2\lambda_n$ findes $\sin 2\lambda_n(n+\frac{1}{2}) = \sin\frac{\pi}{3}$, hvoraf for $\lambda_n(n+\frac{1}{2})$ fremgaar Værdierne $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\ldots$, men bestemmes $\lambda_n(n+\frac{1}{2})$ nærmere af Ligningerne $v_n = \sqrt{q_n}\sin\lambda_n$, $w_n = \sqrt{q_n}\cos\lambda_n$ for $n = 0, 1, 2, 3\ldots$, findes henholdsvis

$$\lambda_n(n+\tfrac{1}{2}) = 0{,}5\,, \quad 0{,}5165\,, \quad 0{,}5203\,, \quad 0{,}5215\ldots.$$

Denne Række konvergerer øjensynlig til den laveste af de ovenfor angivne Værdier, nemlig til

$$\lambda_n(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236\ldots. \tag{101}$$

Heraf findes atter ved Hjælp af Ligningerne $v_n^2 = r_n e^{2\mu_n} = q_n \sin^2\lambda_n$

$$\mu_n(n+\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{4}\log 3\,. \tag{102}$$

Da man har $\lambda_n'(a) = \frac{1}{q_n(a)}$ og $\mu_n'(a) = \frac{1}{2r_n(a)}$, ville nu Rækkeudviklingerne for $\lambda_n(a)$ og $\mu_n(a)$, idet for Kortheds Skyld $q_n(n+\frac{1}{2})$, $r_n(n+\frac{1}{2})$, $q_n'(n+\frac{1}{2})$, o.s.v. betegnes ved q, r, q', ..., blive

$$\lambda_n(a) = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{q}\,\frac{a-n-\frac{1}{2}}{1} - \frac{q'}{q^2}\cdot\frac{(a-n-\frac{1}{2})^2}{1\,.\,2} + \ldots\,, \tag{103}$$

$$\mu_n(a) = -\frac{1}{4}\log 3 + \frac{1}{2r}\,\frac{a-n-\frac{1}{2}}{1} - \frac{r'}{2r^2}\cdot\frac{(a-n-\frac{1}{2})^2}{1\,.\,2} + \ldots\,, \tag{104}$$

Heri ville q', r' og de højere Differentialkoefficienter af $q_n(a)$ og $r_n(a)$ med Hensyn til a for $a = n+\frac{1}{2}$ være at beregne af Ligningerne (99) og (96). Saaledes findes $q' = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $r' = \frac{r}{3(n+\frac{1}{2})}$, hvilken sidste Værdi kun er af Ordenen $a^{-\frac{2}{3}}$ og derfor maa betragtes som 0.

Selve Funktionerne v_n og w_n kunne bestemmes af Ligningerne $(v_n \pm w_n)^2 = q_n \pm 2r_n$, idet Fortegnene for v_n og w_n, som her er ubestemt, nærmere bestemmes af $v_n = \sqrt{q_n}\sin\lambda_n$, $w_n = \sqrt{q_n}\cos\lambda_n$, hvor $\sqrt{q_n}$ er positiv. De Rækkeudviklinger, jeg ad denne Vej har fundet ved Hjælp af Rækkeudviklingerne (96) og (99), hvori uden for Differensen $n+\frac{1}{2}-a$ de to Størrelser $n+\frac{1}{2}$ og a kunne betragtes som lige store, ere

$$v_n(a) = C\left(\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cos\frac{\pi}{6} + \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\cos\frac{5\pi}{6}\cdot\frac{\varepsilon}{1} + \Gamma\left(\frac{3}{3}\right)\cos\frac{9\pi}{6}\cdot\frac{\varepsilon^2}{1.2} + \ldots\right), \tag{105}$$

$$w_n(a) = C\left(\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\left(1+\sin\frac{\pi}{6}\right) + \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\left(1+\sin\frac{5\pi}{6}\right)\frac{\varepsilon}{1} + \Gamma\left(\frac{3}{3}\right)\left(1+\sin\frac{9\pi}{6}\right)\frac{\varepsilon^2}{1.2} + \ldots\right), \tag{106}$$

hvor

$$C = \left(\frac{a}{6}\right)^{\frac{1}{6}}\frac{1}{\sqrt{3\pi}}, \quad \varepsilon = \left(\frac{6}{a}\right)^{\frac{1}{3}}(n+\tfrac{1}{2}-a).$$

Disse Rækker kunne ogsaa let føres tilbage til de bestemte Integraler

$$v_n(a) = C\int_0^{\omega} dx\, x^{-\frac{2}{3}}\cos(\varepsilon x^{\frac{1}{3}} + x), \tag{107}$$

$$w_n(a) = C\left[\int_0^{\infty} dx\, x^{-\frac{2}{3}} e^{\varepsilon x^{\frac{1}{3}} - x} + \int_0^{\omega} dx\, x^{-\frac{2}{3}}\sin(\varepsilon x^{\frac{1}{3}} + x)\right]. \tag{108}$$

Ved at indsætte Rækkerne (105) og (106) i $(v_n \pm w_n)^2 = q_n \pm 2r_n$ vil man uden Vanskelighed kunne overbevise sig om Rigtigheden af disse Udviklinger. Til Brug for denne Beregning skal jeg her anføre Ligningerne

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,\Gamma\left(\frac{1}{6}\right), \quad \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \quad \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2^{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,\Gamma\left(\frac{5}{6}\right).$$

Vi kunne nu gaa over til Fortsættelsen af den i forrige Afsnit afbrudte Beregning og betragte først det Tilfælde, at Kuglen har et mindre Brydningsforhold end det omgivende Medium. Vi forudsætte altsaa $N < 1$, hvormed følger, at Ligningen $\alpha\sin\theta = \alpha'\sin\theta'$ bliver umulig for $\sin\theta > N$.

I Ligningerne (33) og (34) sættes nu $v_n(\alpha') = \sqrt{r_n(\alpha')}\, e^{\mu_n(\alpha')}$, medens $v_n(\alpha)$ og $w_n(\alpha)$ ligesom tidligere udtrykkes ved $q_n(\alpha)$ og $\lambda_n(\alpha)$, og ligesom q'_n kan bortkastes i Sammenligning med q_n, saaledes vil ogsaa r'_n kunne bortkastes i Sammenligning med r_n. Idet $q_n(\alpha)$ bestemmes ved (67), $r_n(\alpha')$ ved (89), vil man erholde

$$2k_n = -1 + e^{2\lambda_n(\alpha)i}\frac{q_n - 2r_n(\alpha')Ni}{q_n + 2r_n(\alpha')Ni} = -1 + e^{2\lambda_n(\alpha)i}\frac{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2 - \alpha'^2} - \sqrt{\alpha^2 - (n+\frac{1}{2})^2}N^2 i}{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2 - \alpha'^2} + \sqrt{\alpha^2 - (n+\frac{1}{2})^2}N^2 i},$$

og sættes

$$\frac{\sqrt{\alpha^2 - (n+\frac{1}{2})^2}}{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2 - \alpha'^2}}N^2 = \operatorname{tg}\delta,$$

faar dette Udtryk den simplere Form

$$2k_n = -1 + e^{2(\lambda_n(\alpha) - \delta)i}.$$

Paa lignende Maade erholdes

$$2s_n = -1 + e^{2(\lambda_n(\alpha) - \Delta)i}, \quad \operatorname{tg}\Delta = \frac{\sqrt{\alpha^2 - (n+\frac{1}{2})^2}}{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2 - \alpha'^2}}.$$

Det Tilfælde, at man alene har $2k_n = -1$, $2s_n = -1$, har allerede været behandlet i det foregaaende Afsnit (Side 34). Det var her almindeligt forudsat, at Funktionerne q_n og λ_n for alle de forekommende Variable skulde kunne udtrykkes ved de i Ligningerne (67) og (68) angivne Formler, men det vil bemærkes, at for dette særlige Tilfældes Vedkommende, hvor k_n og s_n slet ikke indeholde de Variable a og a', have vi kun at gjøre med Funktionerne $q_n(a)$ og $\lambda_n(a)$, og Betingelsen for, at disse skulle kunne udtrykkes ved (67) og (68) er alene $\nu + \frac{1}{2} = a \sin\vartheta < a$. De fundne Resultater gjælde altsaa indtil Afstanden a fra Hovedaxen, og som det vil erindres bestod den paa denne Maade fremstillede Lysbevægelse uden for Kuglen i selve det indfaldende Lys i Rummet paa yz-Planens negative Side og fuldstændig Mørke paa den positive Side af yz-Planen.

Antages dernæst

$$2k_n = e^{2(\lambda_n(a)-\delta)i}, \quad 2s_n = e^{2(\lambda_n(a)-\Delta)i},$$

og sættes heri paa sædvanlig Maade $n = \nu + z$, vil det bemærkes, at Udviklingen efter Potenser af z af $\lambda_{\nu+z}(a)$ give Koefficienter til de forskjellige Potenser af z af en højere Størrelsesorden, end dem som erholdes ved den tilsvarende Udvikling af δ og Δ. Idet vi altsaa sætte $\nu + \frac{1}{2} = a\sin\theta$, ville δ og Δ kunne udtrykkes ved de konstante Værdier

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - N^2}} N^2, \quad \operatorname{tg}\Delta = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - N^2}}.$$

Udtrykkene for k_n og s_n svare nu ganske til det tidligere (Side 35) behandlede Tilfælde, hvorved Tilbagekastningen fra Kuglens ydre Overflade bestemtes. Forskjellen bestaar kun i, at Faktorerne b_ν og c_ν ere gaaede over til -1, og at Fasen er formindsket i K med 2δ og i S med 2Δ, og de tidligere fundne Resultater ville altsaa med disse Forandringer her finde Anvendelse.

Grænsetilfældet $\sin\theta = N$ vil ikke danne nogen særlig Undtagelse, da δ og Δ, naar θ aftager indtil denne Grænse gaa over til $\frac{\pi}{2}$, og Faktorerne $e^{-2\delta i}$ og $e^{-2\Delta i}$ saaledes blive lig -1, hvorved K og S komme til at antage de samme Værdier som dem, der vilde fremgaa af de tidligere Formler, naar θ voxede til den samme Grænse.

Koefficienterne k'_n og s'_n ere bestemte ved

$$k'_n = e^{\lambda_n(a)i - \mu_n(a')} \frac{2N\sqrt{q_n(a)r_n(a')}}{q_n(a) + 2r_n(a')Ni}, \quad s'_n = e^{\lambda_n(a)i - \mu_n(a')} \frac{2N\sqrt{q_n(a)r_n(a')}}{Nq_n(a) + 2r_n(a')i}.$$

Da der tillige for et indre Punkt til $n > a'$ ogsaa maa svare $n > a'$, maa man i Rækkerne for K' og S' (79) sætte $\sqrt{q_n(a')}\sin\lambda_n(a') = \sqrt{r_n(a')}\,e^{\mu_n(a')}$. Det ses saaledes, at disse Rækker ville komme til at indeholde Faktoren $e^{\mu_n(a')-\mu_n(a')}$, som, naar a' og a' ikke ere meget nær lige store, bliver en forsvindende lille Størrelse. Dette fremgaar af det i (93) givne Udtryk for μ_n, som, naar den Variable ikke falder meget nær ved n, ses at være en meget stor, negativ Størrelse og desto større, jo mindre den Variable er. Lysbevægelsen inden for den totalreflekterende Del af Kuglen finder altsaa kun i kjendelig Grad Sted i et tyndt Lag nærmest under Kuglens Overflade.

Sættes $\alpha' = a' - Nh$ og antages h meget lille, vil man have

$$\mu_n(\alpha') - \mu_n(a') = \frac{Nh}{2r_n(a')} = \frac{h}{a}\sqrt{(n+\tfrac{1}{2})^2 - a'^2}\,.$$

Man vil dernæst paa sædvanlig Maade finde

$$K' = \frac{2N\cos\psi}{a\sqrt{1-N^2}\,\mathrm{tg}\,\theta\sqrt{\sin^2\theta - N^2\cos^2\theta}}\, e^{\left(kt + a\cos\theta + \frac{\pi}{2} - \delta\right)i - h\sqrt{\sin^2\theta - N^2}},$$

$$S' = -i\frac{2\sin\psi}{a\sqrt{1-N^2}\,\mathrm{tg}\,\theta}\, e^{\left(kt + a\cos\theta + \frac{\pi}{2} - \Delta\right)i - h\sqrt{\sin^2\theta - N^2}},$$

og $\varphi + \theta = \pi$. Ved Bestemmelsen af Komposanterne $\overline{\xi'}$, $\overline{\eta'}$, $\overline{\zeta'}$ maa man gaa tilbage til Ligningerne (18), hvorved bemærkes, at, da K' og S' oprindelig indeholde Faktoren $e^{\mu_n(a')}$, vil man med Bortkastelse af Størrelser af lavere Orden have

$$\frac{dK'}{da'} = \frac{d\mu_n(a')}{da'}K' = \frac{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2 - a'}}{a'}K' = \frac{\sqrt{\sin^2\theta - N^2}}{N}K'.$$

Tillige erholdes

$$\frac{dK'}{d\varphi'} = (n+\tfrac{1}{2})K'i = a\sin\theta\, K'i\,,$$

og de samme Ligninger gjælde ogsaa, naar for K' sættes S'. Ligningerne (18) give saaledes for dette Tilfælde

$$\overline{\xi'} = \frac{\sin^2\theta}{N}aK', \quad \overline{\eta'} = i\frac{\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta - N^2}}{N}aK', \quad \overline{\zeta'} = -i\sin\theta\, a\, S',$$

hvor de ovenfor fundne Værdier af K' og S' kunne indsættes.

Resultaterne af denne Beregning af den fuldstændige Tilbagekastning vise sig, saavel for de ydre som for de indre Punkters Vedkommende at være i Overensstemmelse med, hvad der er bekjendt fra Theorien om den fuldstændige Tilbagekastning fra plane Flader, og Beregningen fører saaledes ikke ud over, hvad man ogsaa ad elementær Vej vilde kunne udlede.

Der staar endnu kun tilbage at fortsætte Summationerne af Rækkerne K og S (79) fra den Grænse for n, ved hvilken Ligningerne (67) og (68) ikke længere ere gyldige for den Variable a. I alle Tilfælde vil den i (33) givne Værdi af k_n kunne omdannes til

$$2k_n = -1 + Ae^{2\lambda_n(a)i}, \quad A = \frac{q_n(a)(1 + r_n'(a')) - N(i + \frac{1}{2}q_n'(a))2r_n(a')}{q_n(a)(1 + r_n'(a')) - N(-i + \frac{1}{2}q_n'(a))2r_n(a')}\,.$$

Denne ved A betegnede Brøk, vil, naar n overskrider den omtalte Grænse, vise sig at blive lig 1, forudsat at N er forskjellig fra 1. Det Tilfælde, at $N - 1$ er saa lille, at denne Differens maa betragtes som en Størrelse af lavere Orden end Enheden, ville vi her lade ude af Betragtning.

Ligningen $A = 1$ vil nemlig altid finde Sted, naar $q_n'(a)$ er af højere Orden end Enheden, hvilket ifølge (99) er Tilfældet, naar $n - a$ er positiv af højere Orden end $a^{\frac{1}{3}}$. Endvidere er i den betragtede Sum n saa stor, at $q_n(a)$ er af større Orden end Enheden, medens $r_n(a')$ og $r_n'(a')$, naar Differensen $n - a$ baade positiv og negativ er af lavere Orden end a, ikke kunne blive af højere Orden end Enheden. Dette sidste fremgaar af det tidligere (Side 48) anførte, idet man har $n - a' = n - a - (N - 1)a$, hvor det sidste Led ikke kan blive af lavere Orden end a. Det ses saaledes, at man i det foreliggende Tilfælde altid maa have $A = 1$, og da ganske de samme Betragtninger kunne anvendes paa den i (33) givne Værdi af s_n, vil man altsaa have

$$2k_n = -1 + e^{2\lambda_n(a)i}, \quad 2s_n = -1 + e^{2\lambda_n(a)i}.$$

Begge disse Koefficienter konvergere hurtig for $n > a$ med voxende n til 0.

Idet vi med Hensyn til Tilfældet $2k_n = -1$, $2s_n = -1$ kunne henvise til det foregaaende, ville vi have at betragte Rækken

$$Q = \frac{aK}{\cos\psi} = \frac{iaS}{\sin\psi} = -\sum_{n_2}^{n_3} \sqrt{\frac{2q_n(a)}{\pi n \sin\varphi}} \sin\left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right) e^{\left(kt - \frac{n\pi}{2} + 2\lambda_n(a) - \lambda_n(a)\right)i},$$

hvor n_3 er den øvre Grænse for n, inden for hvilken $q_n(a)$ og $\lambda_n(a)$ lade sig bestemme ved (67) og (68).

Potensexponenten i denne Sum er

$$\left(kt - \frac{n\pi}{2} + 2\lambda_n(a) - \lambda_n(a) \pm \left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right) i,$$

og sættes heri $n = \nu + z$ og $\nu + \frac{1}{2} = a \sin\vartheta$, vil Koefficienten til z med Udeladelse af Størrelser, som ere lavere end Enheden, alene blive $-\vartheta \pm \varphi$. Skal denne Koefficient altsaa være 0 eller meget lille, maa øverste Fortegn læses og $\varphi - \vartheta$ maa være 0 eller meget lille. Heraf ses, at Svingningskomposanterne ifølge (80) kunne bestemmes ved

$$\bar{\xi}_e = \sin^2\varphi \cos\psi Q, \quad \bar{\eta}_e = \sin\varphi \cos\varphi \cos\psi Q, \quad \bar{\zeta}_e = -\sin\varphi \sin\psi Q,$$

hvoraf atter for Komposanterne med Hensyn til de faste Axer erholdes

$$\xi_e = 0, \quad \eta_e = \sin\varphi Q, \quad \zeta_e = 0.$$

Selve Størrelsen $\sin\varphi Q$ lader sig, da $\varphi - \vartheta$ er meget lille og man derfor udenfor Exponenten kan sætte $q_n(a) = \dfrac{1}{\cos\vartheta} = \dfrac{1}{\cos\varphi}$ og $n = a\sin\vartheta = a\sin\varphi$, reducere til

$$\sin\varphi Q = \eta_e = \frac{i}{\sqrt{2\pi a \cos\varphi}} \sum_{n_2}^{n_3} e^{F_n i}, \quad F_n = kt - \frac{n\pi}{2} + 2\lambda_n(a) - \lambda_n(a) + (n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4},$$

hvorved det sammensatte Fænomen, der omfatter parallele Lysstraalers Bøjning ved en reflekterende Kugle, er fremstillet under en simpel Form.

Betragte vi først den Del af Summen, hvor n er større end α, ses det, at $\lambda_n(\alpha)$ med voxende n aftager fra $\frac{\pi}{6}$ til 0. En nærmere Bestemmelse heraf erholdes ved Ligningerne

$$e^{2\lambda_n(\alpha)i} = \frac{1+\operatorname{tg}\lambda_n(\alpha)\,i}{1-\operatorname{tg}\lambda_n(\alpha)\,i} = \frac{1+e^{2\mu_n(\alpha)}\,i}{1-e^{2\mu_n(\alpha)}\,i} = 1+2\sum_0^\infty e^{2m\mu_n(\alpha)}\,i^m\,,$$

hvor $\mu_n(\alpha)$ for $n=\alpha$ har Værdien $-\frac{1}{4}\log 3$ og med voxende n hurtig aftager.

Sættes altsaa i den betragtede Sum først $e^{2\lambda_n(\alpha)i}=1$, og indsættes i Exponenten paa sædvanlig Maade $n=\nu+z$, $\nu+\frac{1}{2}=a\sin\vartheta$, vil ved Udvikling efter Potenser af z Koefficienter til zi i Exponenten blive $\varphi-\vartheta$. Saaledes gaar for $\varphi=\vartheta$ Summen over til Integralet

$$\int_{\alpha-a\sin\vartheta}^{n_3-a\sin\vartheta} dz\, e^{\left(kt-a\cos\varphi-\frac{\pi}{4}-\frac{z^2}{2a\cos\varphi}\right)i} = -i\sqrt{2\pi a\cos\varphi}\;\eta_e\,,$$

som ved Substitutionen

$$z=\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{2a\cos\varphi}\,,\quad \frac{\varepsilon}{2}=\frac{a\sin\varphi-\alpha}{\sqrt{2a\cos\varphi}}\,,$$

giver

$$\eta_e=\frac{i}{\sqrt{\pi}}\,e^{\left(kt-a\cos\varphi-\frac{\pi+\varepsilon^2}{4}\right)i}\int_0^\omega dx\, e^{(\varepsilon x-x^2)i}\,,$$

hvilket Integral svarer til Integralet (57) naar Fortegnet for i forandres til det modsatte. Det fremgaar af Behandlingen af dette sidste Integral, at for $\varepsilon>0$, altsaa Punktet beliggende uden for Kuglens geometriske Skyggerand $(a\sin\varphi>\alpha)$, er Integralet en periodisk Funktion. Inden for Skyggeranden $(\varepsilon<0)$ bliver det derimod aperiodisk. I selve Skyggeranden $(\varepsilon=0)$ erholdes

$$\eta_e=\tfrac{1}{2}\,e^{(kt-a\cos\varphi)i}\,.$$

Resultatet er i alle Henseender det samme som det, man erholder for Lysets Bøjning ved en plan, cirkulær Skive, sat i Stedet for Kuglen i den Storcirkel, som tangeres af de indfaldende Straaler.

Den anden Del af den ovenfor betragtede Sum er

$$2\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{\alpha}^{n_3} e^{\left(kt-\lambda_n(\alpha)+(n+\frac{1}{2})\varphi-(2n-2m+1)\frac{\pi}{4}\right)i+2m\mu_n(\alpha)}\,.$$

Sættes heri $n=\nu+z$, $\nu+\frac{1}{2}=\alpha=a\sin\vartheta$ og benyttes for $\mu_n(\alpha)$ Udviklingen (104), vil ved Udviklingen efter Potenser af z, Koefficienten til z i Exponenten blive $(\varphi-\vartheta)i-\frac{m}{r}$, hvor $r=r_\nu(\nu+\frac{1}{2})$ er bestemt ved (97) og er af Ordenen $\alpha^{\frac{1}{3}}$.

Hvis nu $\varphi - \vartheta$ er af højere Orden end $\alpha^{-\frac{1}{3}}$, vil den betragtede Sum, naar alene Størrelserne af højeste Orden medtages, kunne udtrykkes ved

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1}{\varphi - \vartheta} e^{\left(kt - a\cos\vartheta + a(\varphi-\vartheta) + (2m+1)\frac{\pi}{4}\right)i - \frac{m}{2}\log 3},$$

som er af en lavere Orden end $\alpha^{\frac{1}{3}}$.

Hvis derimod det betragtede Punkt ligger saa nær ved Kuglens geometriske Skyggerand, at $\varphi - \vartheta$ bliver af samme Orden som $\alpha^{-\frac{1}{3}}$ eller af en lavere Orden, saa ville alle Led i Udviklingen af Exponenten efter Potenser af z komme i Betragtning, men ved Substitutionen $z = rx$ ville de alle blive af Ordenen α^0, og hele Integralet vil blive af samme Orden som r, altsaa af Ordenen $\alpha^{\frac{1}{3}}$. Den hertil svarende Svingningsamplitude vilde saaledes kunne udtrykkes ved

$$C \frac{\alpha^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{a\cos\varphi}},$$

hvor C er en numerisk Konstant. En nærmere Beregning af denne Konstant har næppe tilstrækkelig Interesse, da det hurtig ses, at denne Del af Lysbevægelsen kun kan blive meget ringe, og, idet den falder sammen med det øvrige bøjede Lys, næppe vil kunne blive Gjenstand for Iagttagelsen. Formlen viser, at Intensiteten af dette Lys er proportional med Kuglens Radius i Potensen $\frac{2}{3}$, og med Bølgelængden i Potenseu $\frac{1}{3}$, samt omvendt proportional med det betragtede Punkts Afstand fra den af de indfaldende Straaler tangerede Storcirkel, forudsat dog, at denne sidste Afstand selv ikke bliver meget lille.

Sluttelig er ogsaa det til $n < \alpha$ svarende Svingningsudslag bestemt ved

$$\eta_e = \frac{i}{\sqrt{2\pi a\cos\varphi}} \sum_{n_2}^{\alpha} e^{F_n i},$$

under hvilken Summation $\lambda_n(\alpha)$ med voxende n aftager fra en ubestemt stort Værdi til $\frac{\pi}{6}$. Sættes $n = \nu - z$, $\nu + \frac{1}{2} = \alpha = a\sin\vartheta$, erholdes

$$\eta_e = \frac{i}{\sqrt{2\pi a\cos\varphi}} \int_0^{\omega} dz\, e^{\left(kt - a\cos\vartheta + a(\varphi-\vartheta) + 2\lambda_{\nu-z}(\alpha) - \frac{\pi}{4} - (\varphi-\vartheta)z\right)i},$$

hvor $\lambda_{\nu-z}(\alpha)$ udvikles ifølge (103). Det vil nu ses, at dette Tilfælde ganske svarer til det ovenfor behandlede, og at Resultatet kan fremstilles under samme Form. Denne Del af Lysbevægelsen svarer til Bøjningen af de under streifende Incidens fuldstændig tilbagekastede Lysstraaler. Intensiteten af disse sidste Straaler aftager med voxende Indfaldsvinkel, dog vil paa Grund af Bøjningen denne Intensitet ikke blive Nul i den geometriske Skyggerand, men derimod en Størrelse af samme Art som Intensiteten af de ovenfor betragtede bøjede Straaler, hvorefter Intensiteten hurtig aftager indenfor Skyggeranden.

Summationerne med Hensyn til n ere endnu kun udførte indtil den øvre Grænse $n = n_3$, men som ovenfor bemærket ville Koefficienterne k_n og s_n for $n > a$ hurtig konvergere til 0 med voxende n. Denne Del af Summerne vil derfor i Almindelighed blive en forsvindende lille Størrelse.

7. Mængde af udstraalet Lys. a meget lille. System af smaa Kugler.

Alt fra den belyste Kugle udgaaet Lys tænkes opsamlet paa den indvendige Side af en koncentrisk Kugleflade i uendelig Afstand fra Kuglen. Er L hele den opsamlede Lysmængde, r den uendelige Kugles Radius og I den ved Amplitudens Kvadrat maalte Lysintensitet i Afstanden r, saa vil L kunne defineres og bestemmes ved

$$L = r^2 \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi\, I. \tag{109}$$

Ifølge Ligningerne (17) og (31) kunne Svingningskomposanterne for $a = \dfrac{2\pi r}{\lambda}$ og r uendelig stor udtrykkes ved

$$\bar{\xi}_e = 0, \quad \bar{\eta}_e = -\frac{i\cos\psi}{a} e^{(kt-a)i} \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(k_n \frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} + s_n \frac{d P_n}{\sin\varphi\, d\varphi} \right),$$

$$\bar{\zeta}_e = \frac{i\sin\psi}{a} e^{(kt-a)i} \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(k_n \frac{d P_n}{\sin\varphi\, d\varphi} + s_n \frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} \right).$$

Heri ere k_n og s_n komplexe Størrelser, hvis Modulus være betegnet ved $\bar{k}_n$ og $\bar{s}_n$. Bestemmes nu I ved Summen af Kvadraterne af disse Komposanters Amplituder, vil Ligning (109), efter at Integrationen med Hensyn til ψ er udført, give

$$L = \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \left[\left(\sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\bar{k}_n \frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} + \bar{s}_n \frac{d P_n}{\sin\varphi\, d\varphi} \right) \right)^2 + \left(\sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\bar{k}_n \frac{d P_n}{\sin\varphi\, d\varphi} + \bar{s}_n \frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} \right) \right)^2 \right].$$

Ethvert af disse Kvadrater kan ogsaa udtrykkes som et Produkt af to Summer med de Variable n og m, og bemærkes, at man har

$$\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \left(\frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} \cdot \frac{d^2 P_m}{d\varphi^2} + \frac{1}{\sin^2\varphi} \frac{d P_n}{d\varphi} \frac{d P_m}{d\varphi} \right) = \begin{cases} 0 & \text{for } m \gtrless n \\ \dfrac{2n^2(n+1)^2}{2n+1} & \text{for } m = n, \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} d\varphi \left(\frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} \cdot \frac{d P_m}{d\varphi} + \frac{d P_n}{d\varphi} \cdot \frac{d^2 P_m}{d\varphi^2} \right) = 0,$$

vil man finde Lysmængden L bestemt ved

$$L = \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_1^{\infty} (2n+1) \left(\bar{k}_n^2 + \bar{s}_n^2 \right). \tag{110}$$

De almindelige Udtryk (33) for Koefficienterne k_n og s_n kunne ogsaa skrives under Formen

$$k_n = -\frac{1}{1+p_n i}, \quad p_n = \frac{w_n(\alpha) v_n'(\alpha') - N w_n'(\alpha) v_n(\alpha')}{v_n(\alpha) v_n'(\alpha') - N v_n'(\alpha) v_n(\alpha')}, \tag{111}$$

$$s_n = -\frac{1}{1+q_n i}, \quad q_n = \frac{N w_n(\alpha) v_n'(\alpha') - w_n'(\alpha) v_n(\alpha')}{N v_n(\alpha) v_n'(\alpha') - v_n'(\alpha) v_n(\alpha')}. \tag{112}$$

Disse Koefficienters Modulus er altsaa mindre end 1, undtagen i de Tilfælde, at man har $p_n = 0$, hvortil svarer $k_n = -1$, eller $q_n = 0$, hvortil svarer $s_n = -1$.

Vi skulle nu nærmere bestemme Lysbevægelsen i det Tilfælde, at den belyste Kugles Diameter er meget lille i Sammenligning med Bølgelængden af det indfaldende Lys, saaledes at α bliver at betragte som saa lille et Tal, at i Rækkeudviklinger efter Potenser af α i Reglen kun det Led, som indeholder den laveste Potens af α, medtages. Med Hensyn til α' gjøres derimod foreløbig ingen indskrænkende Antagelse.

Ifølge Rækkeudviklingerne (22) og (24) vil man, naar kun det første Led af Rækkerne medtages, have

$$v_n(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}}{1.3\ldots 2n+1}, \quad v_n'(\alpha) = \frac{(n+1)\alpha^n}{1.3\ldots 2n+1},$$

$$w_n(\alpha) = \frac{1.3\ldots 2n-1}{\alpha^n}, \quad w_n'(\alpha) = -n\frac{1.3\ldots 2n-1}{\alpha^{n+1}}.$$

Indsættes disse Værdier i (111) og (112), vil det ses, at i Almindelighed blive k_n og s_n meget smaa Størrelser af Ordenen α^{2n+1}. Man vil nemlig erholde

$$p_n = \frac{1^2.3^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)}{\alpha^{2n+1}} \cdot \frac{\alpha' v_n'(\alpha') + N^2 n v_n(\alpha')}{\alpha' v_n'(\alpha') - N^2(n+1) v_n(\alpha')},$$

$$q_n = \frac{1^2.3^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)}{\alpha^{2n+1}} \cdot \frac{\alpha' v_n'(\alpha') + n v_n(\alpha')}{\alpha' v_n'(\alpha') - (n+1) v_n(\alpha')},$$

i hvilket sidste Udtryk ogsaa kan sættes

$$\alpha' v_n'(\alpha') + n v_n(\alpha') = \alpha' v_{n-1}(\alpha'), \qquad \alpha' v_n'(\alpha') - (n+1) v_n(\alpha') = -\alpha' v_{n+1}(\alpha').$$

Afset altsaa fra de særlige Tilfælde, ville Rækkerne (31) for K og S indskrænke sig til det første, til $n = 1$ svarende Led, hvori vil indgaa

$$k_1 = i\frac{\alpha^3}{3} \cdot \frac{\alpha' v_1'(\alpha') - 2N^2 v_1(\alpha')}{\alpha' v_1'(\alpha') + N^2 v_1(\alpha')}, \qquad s_1 = -i\frac{\alpha^3}{3}\frac{v_2(\alpha')}{v_0(\alpha')},$$

hvorefter Svingningskomposanterne $\overline{\xi}_e$, $\overline{\eta}_e$, $\overline{\zeta}_e$ let bestemmes ved Hjælp af Ligningerne (17).

Hvis nu α' ligesom α er en meget lille Størrelse, vil k_1 kunne reduceres til Formen

$$k_1 = -i\frac{2\alpha^3}{3} \cdot \frac{N^2-1}{N^2+2},$$

medens man for α' meget lille eller naar α' er Rod i Ligningen $v_2(\alpha') = 0$ erholder $s_1 = 0$.

I dette sidste Tilfælde vil altid ifølge Ligningerne (17) $\overline{\eta_e}$ være proportional med $\cos\varphi$, hvoraf følger, at det vinkelret paa de indfaldende Straaler tilbagekastede Lys svinger vinkelret paa Indfaldsplanen og altsaa er fuldstændig polariseret i Indfaldsplanen. Dette gjælder selvfølgelig ogsaa, naar det indfaldende Lys er upolariseret.

Ligeledes maa under de samme Forudsætninger den samme Lov gjælde, naar vi i Stedet for en enkelt Kugle tænke os en Samling af lignende, indbyrdes adskilte og tilfældig ordnede Kugler. Sættes endvidere i Udtrykket for k_1 $\alpha = \frac{2\pi R}{\lambda}$, idet R er Kuglens Radius, ses det, at Lysbevægelsen i et vilkaarligt Punkt uden for Kuglen afhænger, foruden af det indfaldende Lys og af Punktets Koordinater, alene af Størrelsen $\frac{N^2-1}{N^2+2}R^3$. Tænke vi os nu i det omtalte System af Kugler disses Radier, ved uforandret Stilling af deres Centrer, voxe indtil R_1, som dog vedvarende maa være meget lille i Sammenligning med en Bølgelængde, medens deres Brydningsforhold forandres fra N til N_1, og sker denne Forandring saaledes, at man beholder

$$\frac{N^2-1}{N^2+1}R^3 = \frac{N_1^2-1}{N_1^2+2}R_1^3,$$

saa maa Lysbevægelsen udenfor Kuglerne og overalt udenfor Systemet forblive upaavirket af Forandringen. Lade vi R_1 blive lige stor med Kuglecentrernes mindste halve Middelafstand, som antages meget lille i Sammenligning med Bølgelængden, vil Systemet meget nær komme til at svare til et homogent Medium med Brydningsforholdet N_1. Heraf kan atter sluttes, at naar i Systemet Kuglerne forblive uforandrede, medens dets Tæthed d_1 forandres, vil Systemets Brydningsforhold N_1 forandre sig saaledes, at $\frac{N_1^2-1}{N_1^2+1}\frac{1}{d_1}$ forbliver konstant (jvnf. «Farvespredningens Theori»).

Hele Mængden af det af den enkelte Kugle udstraalede Lys vil ifølge (110) være bestemt ved

$$L = \frac{2\lambda^2\alpha^6}{3\pi}\left(\frac{N^2-1}{N^2+2}\right)^2,$$

og er A Antallet af Kugler indenfor Rumenheden, vil AL være hele den Lysmængde, som udstraales fra hver Rumenhed af Systemet. Denne Størrelse er Systemets Absorbtionskoefficient, og betegnes denne ved h, vil man altsaa, naar tillige α udtrykkes ved $\frac{2\pi R}{\lambda}$, have

$$h = AL = A\frac{128\pi^5R^6}{3\lambda^4}\left(\frac{N^2-1}{N^2+2}\right)^2, \quad A = \frac{3}{4\pi R_1^3}.$$

Det ses heraf, at Absorbtionskoefficienten er omvendt proportional med fjerde Potens af Bølgelængden (Rayleigh's Lov [1])). Er omvendt Systemets Absorptionskoefficient h og dets

---

[1]) J. W. Strutt: Phil. Mag. 41, Febr., Apr., Jun. 1871.

Brydningsforhold N_1 givet, vil under de givne Forudsætninger Kuglernes Antal paa Rumenheden og en lavere Grænse for deres Størrelse kunne udledes, idet man af de angivne Formler finder

$$A = \frac{24\pi^3}{h\lambda^4}\left(\frac{N_1^2-1}{N_1^2+2}\right)^2, \qquad R^3 = \frac{h\lambda^4}{32\pi^4}\frac{(N_1^2+2)(N^2+2)}{(N_1^2-1)(N^2-1)} > \frac{h\lambda^4}{32\pi^4}\frac{N_1^2+2}{N_1^2-1}.$$

Som Exempel kunne vi tage Brydningsforholdet og Absorptionskoefficienten for den atmosfæriske Luft ved sædvanligt Tryk, nemlig $N_1 = 0{,}00029$ og, idet $10^{-6\,\mathrm{mm}}$ tages som Længdeenhed, $h\lambda^4 = 0{,}0017$. Med denne sidste Koefficient vil der paa en Strækning af 8 Kilometer absorberes 11,3 Procent af Lys med Bølgelængden 580 og det dobbelte for $\lambda = 480$.

Disse Talværdier indsatte ovenfor give

$$A = 0{,}0163, \qquad R = 0{,}141\left(\frac{N^2+2}{N^2-1}\right)^{\frac{1}{3}} > 0{,}141,$$

altsaa paa en Kubikmillimeter et Antal af $0{,}0163.10^{18}$ Kugler med en Radius af mindst $0{,}141^{-6\,\mathrm{mm}}$. Hertil svarer $\alpha = 0{,}00153$ for $\lambda = 580$ og $\alpha = 0{,}00185$ for $\lambda = 480$.

Vidt forskjellig fra denne Lysbevægelse er den, som fremkommer i de særlige Tilfælde, at man har $p_n = 0$ eller $q_n = 0$, hvilke Muligheder indtræde for en hel Række af Bølgelængder. Hertil svarer ifølge Ligningerne (111) og (112)

$$w_n(\alpha)v_n'(\alpha') - Nw_n'(\alpha)v_n(\alpha') = 0, \qquad Nw_n(\alpha)v_n'(\alpha') - w_n'(\alpha)v_n(\alpha') = 0.$$

Den første af disse Ligninger svarer tilnærmelsesvis til $v_n(\alpha') = 0$, den anden til $v_{n-1}(\alpha') = 0$. Sættes nøjagtigere i den første Ligning $\alpha' = \beta + \varepsilon$, og er β Rod i Ligningen $v_n(\beta) = 0$, saa erholdes ved Udvikling efter Potenser af ε og Bortkastelse af de Led, som indeholde højere Potenser af ε end den første,

$$\varepsilon = \frac{w_n(\alpha)}{Nw_n'(\alpha)} = -\frac{\alpha}{Nn}.$$

Er den givne Ligning $q_{n+1} = 0$, vil hertil, naar de to første Led i Udviklingen af $w_{n+1}(\alpha)$ og $w'_{n+1}(\alpha)$ medtages, svare

$$N\alpha\left(1 + \frac{\alpha^2}{2(2n+1)}\right)v'_{n+1}(\alpha') + \left(n+1+\frac{(n-1)\alpha^2}{2(2n+1)}\right)v_{n+1}(\alpha') = 0,$$

hvor

$$v_{n+1}(\alpha') = -v_n'(\alpha') + \frac{n+1}{\alpha'}v_n(\alpha') \quad \text{og} \quad v'_{n+1}(\alpha') = -\left(\frac{(n+1)^2}{\alpha'^2} - 1\right)v_n(\alpha') + \frac{n+1}{\alpha'}v_n'(\alpha').$$

Heraf findes med den vedtagne Grad af Tilnærmelse

$$(2n+1)\alpha' v_n(\alpha') + \alpha^2 v_n'(\alpha') = 0.$$

Sættes nu heri $\alpha' = \beta + \varepsilon'$, idet ligesom før $v_n(\beta) = 0$, erholdes

$$\varepsilon' = -\frac{\alpha^2}{(2n+1)\alpha'} = -\frac{\alpha}{N(2n+1)}.$$

Rødderne i $p_n = 0$ og $q_{n+1} = 0$ ere altsaa meget nær, men ikke nøjagtig lige store, og Forskjellen imellem to tilsvarende Rødder er

$$\varepsilon' - \varepsilon = \frac{\alpha(n+1)}{Nn(2n+1)}, \qquad n > 0 .$$

Betegnes de tilsvarende Forandringer af Bølgelængden ved δ og δ', saa er

$$\frac{\varepsilon}{\beta} = -\frac{\delta}{\lambda}, \quad \frac{\varepsilon'}{\beta} = -\frac{\delta'}{\lambda} \quad \text{og} \quad \delta - \delta' = \frac{\lambda\alpha(n+1)}{\beta Nn(2n+1)} = \frac{\pi^2}{\beta^2} \cdot \frac{4R^2}{\lambda} \cdot \frac{n+1}{n(2n+1)} .$$

Nedenstaaende Tavle angiver de fem største Værdier af $\frac{\pi}{\beta}$ for $n = 0, 1, 2, 3,$ idet β er Rod i $v_n(\beta) = 0$.

$n = 0$,	$n = 1$,	$n = 2$,	$n = 3$,	
1	0,6992	0,5451	0,4496	. . .
0,5000	0,4067	0,3454	0,3016	. . .
0,3333	0,2881	0,2549	0,2293	. . .
0,2500	0,2233	0,2025	0,1856	. . .
0,2000	0,1823	0,1681	0,1561	. . .
⋮	⋮	⋮	⋮	

Det vil nu ses, at den største Forskjel i Bølgelængde $\delta - \delta'$ svarer til $\frac{\pi}{\beta} = 0,6992$, $n = 1$. Sættes dernæst til Exempel $R = 0,141$ og $\lambda = 580$, erholdes $\delta - \delta' = 0,000045$, som er 13000 Gange mindre end Forskjellen (0,6) imellem Bølgelængderne af Solspektrets to Linier D_1 og D_2.

I et System af Kugler fremkommer i de her betragtede særlige Tilfælde Absorbtionstriber, naar gjennemgaaende hvidt Lys opløses i et Spektrum. Medens nemlig, som vi have set, den fra hver Kugle udstraalede Lysmængde i Almindelighed er en meget lille, med R^6 proportional, Størrelse, vil den for $p_n = 0$ eller $q_n = 0$ være $\frac{\lambda^2(2n+1)}{2\pi}$ eller lige saa stor som den Mængde af indfaldende Lys, der ved uforstyrret Gang af Lysstraalerne vilde ramme en Kugle med Radius $\frac{\lambda\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\pi}$. Da i det antagne System Nabokuglernes Middelafstande ere forudsatte at være langt mindre, ses det, at Systemet omtrent kan siges at være uigjennemtrængeligt for denne Art af Straaler. Det vil tillige bemærkes, at de til $q_1 = 0$ eller $v_0(\beta) = 0$ svarende Absorbtionstriber ere enkelte, alle de andre dobbelte.

Har man for et System bestemt en Række Absorbtionstribers Bølgelængder, ville disse kunne henføres til Reciprokerne af Rødderne i $v_n(\beta) = 0$, $n = 0,1,2, \ldots$, ved Multiplikation med en enkelt konstant Faktor. Idet denne Faktor er lig med $\frac{N}{2\pi R}$, vil det altsaa være muligt heraf, af Systemets Brydningsforhold og af dets almindelige Absorbtionskoefficient, at bestemme alle Systemets Konstanter, nemlig Antallet af Kugler paa Rumenheden, Kuglernes Størrelse og deres Brydningsforhold.

Hertil vil ogsaa kunne benyttes Maalinger af Stribernes Bredde, hvoraf Beregningen kan udføres paa følgende Maade.

Naar Bølgelængden λ svarer til $p_n = 0$, vil Værdien af p_n for en nærliggende Bølgelængde $\lambda + \delta$ være bestemt ved

$$p_n = -\left[\frac{dp_n}{d\alpha} + \frac{dp_n}{d\alpha'} N\right]^{p=0} \cdot \frac{\alpha\delta}{\lambda} = \frac{1^2 . 3^2 \ldots (2n-1)^2}{\alpha^{2n+1}} \cdot \frac{N^2-1}{N^2}\left(nN^2 + n(n+1)\right)\frac{\delta}{\lambda}.$$

Paa samme Maade vil, naar λ svarer til $q_n = 0$, q_n for Bølgelængden $\lambda + \delta$ være bestemt ved

$$q_n = \frac{1^2 . 3^2 \ldots (2n-1)^2}{\alpha^{2n-1}}(N^2-1)\frac{\delta}{\lambda}.$$

Skjøndt δ er betragtet som en lille Størrelse, vil den dog altid kunne antages saa stor, at p_n og q_n blive meget store i Forhold til Enheden, saaledes at k_n og s_n ville kunne bestemmes ved

$$k_n = \frac{i}{p_n}, \qquad s_n = \frac{i}{q_n}.$$

For et System af Kugler ville de hertil svarende Absorbtionskoefficienter være

$$\frac{A}{p_n{}^2} \frac{\lambda^2(2n+1)}{2\pi} \quad \text{og} \quad \frac{A}{q_n{}^2} \cdot \frac{\lambda^2(2n+1)}{2\pi}.$$

Vi kunne nu i Spektret af det gjennemgaaede Lys betragte de to Grænser for en Absorbtionstribe som de Punkter, hvor Lysintensiteten er reduceret til en konstant Brøk e^{-c}, og Stribens Bredde tænkes da bestemt ved Forskjellen 2δ imellem Bølgelængderne i disse to Punkter. Er x den tilbagelagte Strækning af Systemet, vil man have

$$c = \frac{Ax}{p_n{}^2} \cdot \frac{\lambda^2(2n+1)}{2\pi} \quad \text{og} \quad c = \frac{Ax}{q_n{}^2} \cdot \frac{\lambda^2(2n+1)}{2\pi}.$$

Indsættes heri de ovenfor beregnede Værdier af p_n og q_n, ses det, at Stribernes Bredde altid er proportional med Kvadratroden af den tilbagelagte Vejlængde, ligesom ogsaa med Kvadratroden af Antallet af Kugler paa Rumenheden.

Den bredeste Stribe svarer til $\alpha' = \pi$, $q_1 = \frac{\alpha'^2 - \alpha^2}{\alpha^3} \cdot \frac{\delta}{\lambda}$, som giver

$$2\delta = \frac{8R^3}{\lambda}\sqrt{\frac{6\pi Ax}{c}}.$$

For $A = 0{,}0163$, $R = 0{,}141$, $\lambda = 580$, $x = 10^{10}$ eller 10 Meter og $c = 0{,}693$, svarende til en Absorbtion i Stribens Grænser af 50 Procent, erholdes

$$2\delta = 2{,}57,$$

som svarer til en Bredde, der er 4,3 Gange større end Afstanden imellem de to Linier $D_1 D_2$. Det er ikke uden Interesse at lægge Mærke til, at 2δ ogsaa umiddelbart kan beregnes af den almindelige Absorbtionskoefficient h uden Kjendskab til Systemets øvrige Konstanter, idet nemlig N i Formlen for h her kan betragtes som et meget stort Tal.

Absorbtionstriberne kunne saaledes blive meget brede og faa snarere Karakteren af Absorbtionsbaand, naar α' hører til de mindste af Rødderne i $v_0(\alpha') = 0$. Hører derimod α' til Rødderne i $v_1(\alpha') = 0$, $v_2(\alpha') = 0$, ... blive med de her exempelvis benyttede Talkonstanter selv i gunstigste Tilfælde Striberne reducerede til Linier af en næppe maalelig Bredde, hvad selvfølgelig dog ikke udelukker, at de kunne gjøres synlige.

Det har ikke været min Hensigt med denne Beregning af Lysbevægelsen indenfor et System af smaa Kugler at gjennemføre en nøjagtig Bestemmelse af denne, hvortil vilde udkræves et større Apparat. Jeg har kun søgt at fremdrage det ejendommelige ved denne Lysbevægelse, som for en enkelt Kugles Vedkommende lader sig nøjagtig bestemme og derigjennem i Hovedsagen ogsaa lader sig beregne for en Samling af Kugler, idet Hensigten hermed har været, dels at paavise Muligheden af gjennem Systemets optiske Egenskaber at komme til Kundskab om Elementerne, som ved deres Lidenhed selv unddrage sig den umiddelbare Iagttagelse, dels at aabne Blikket for den slaaende Analogi, som her af sig selv træder frem, imellem det antagne Systems og Luftarternes optiske Egenskaber.

Rettelse.

Side 17, 2den Linie fra oven:

$$Q = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} W \quad \text{læs} \quad Q = 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}} W.$$